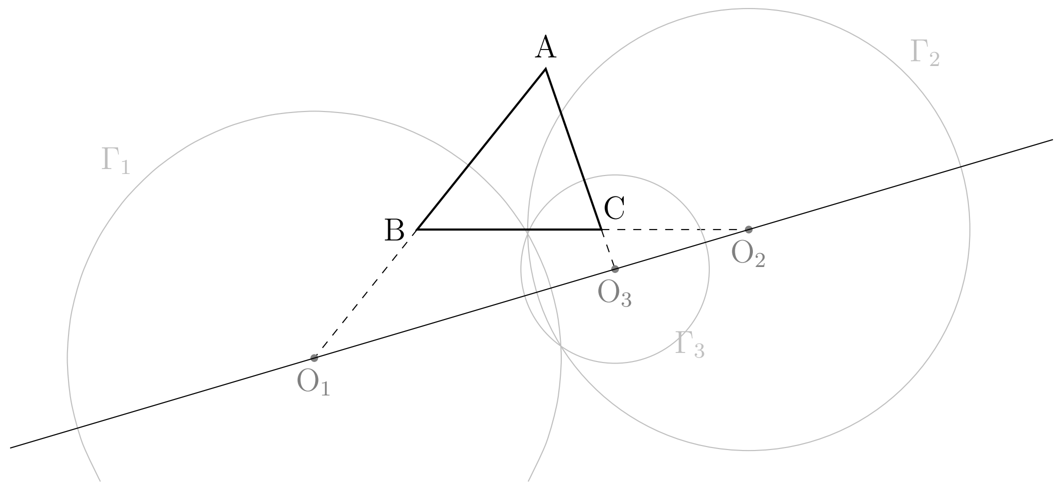
アポロニウスの円とメネラウスの定理

△ABC と，互いに異なる正の実数 a, b, c に対して，

- 頂点 A, B からの距離の比がそれぞれ $a : b$ である点の軌跡を Γ_1，
- 頂点 B, C からの距離の比がそれぞれ $b : c$ である点の軌跡を Γ_2，
- 頂点 C, A からの距離の比がそれぞれ $c : a$ である点の軌跡を Γ_3

と定めると，図形 Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ は全て円であることが知られているので[1]，その中心をそれぞれ，O_i $(i = 1, 2, 3)$ とする．このとき，次が成り立つ．

命題． 3 点 O_i $(i = 1, 2, 3)$ は一直線上にある．（下図は，$a > b > c$ の場合）



証明．アポロニウスの円の中心に関して，次が知られている[2]．

- O_1 は，線分 AB を $a^2 : b^2$ に外分する点であり，
- O_2 は，線分 BC を $b^2 : c^2$ に外分する点であり，
- O_3 は，線分 CA を $c^2 : a^2$ に外分する点である．

この事実から，O_i $(i = 1, 2, 3)$ はそれぞれ AB，BC，CA の延長線上の点であり，

$$\frac{\mathrm{AO_1}}{\mathrm{O_1B}} \cdot \frac{\mathrm{BO_2}}{\mathrm{O_2C}} \cdot \frac{\mathrm{CO_3}}{\mathrm{O_3A}} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2} = 1$$

が成り立つので，メネラウスの定理の逆[3] から，3 点 O_i $(i = 1, 2, 3)$ は一直線上にあることが従う．□

補足． 今回の主題ではないが，Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ が同じ 2 点で交わっているのは興味深い問題である．これは必ずしも成り立つわけではないが，アポロニウスの円と根軸[4] で考察する．

---

[1] アポロニウスの円と呼ばれる．

[2] アポロニウスの円 https://gleamath.com/Apolloniuss-circle/ を参照．
例えば，$\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$ とすると，円 Γ_1 の方程式は，次のように表される．

$$\left(x - \frac{-b^2x_1 + a^2x_2}{a^2 - b^2}\right)^2 + \left(y - \frac{-b^2y_1 + a^2y_2}{a^2 - b^2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2}\right)\left(\frac{b^2}{a^2 - b^2}\right)\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}$$

[3] メネラウスの定理とその逆 https://gleamath.com/menelaus-theorem/

[4] https://gleamath.com/Apolloniuss-circle-and-radical-axis/