アポロニウスの円と根軸

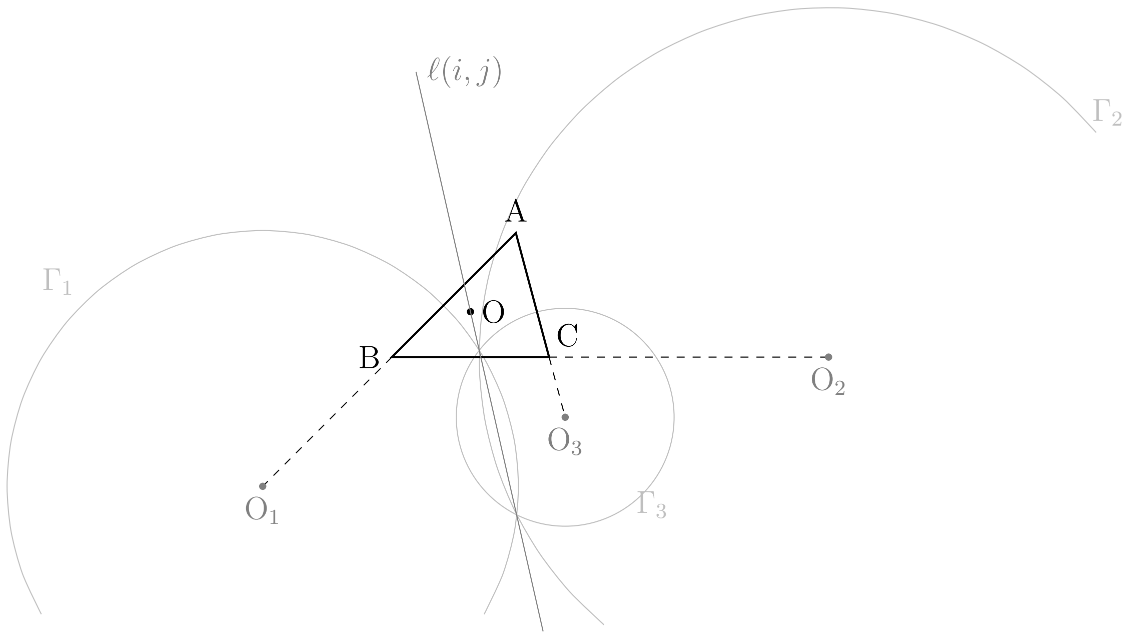
△ABC と，互いに異なる正の実数 a, b, c に対して，

- 頂点 A, B からの距離の比がそれぞれ $a : b$ である点の軌跡を Γ_1，
- 頂点 B, C からの距離の比がそれぞれ $b : c$ である点の軌跡を Γ_2，
- 頂点 C, A からの距離の比がそれぞれ $c : a$ である点の軌跡を Γ_3

と定めると，図形 Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ は全て円であることが知られている．[1] その中心と半径をそれぞれ，O_i $(i = 1, 2, 3)$，r_i $(i = 1, 2, 3)$ とする．また，２円 Γ_i, Γ_j $(i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3,\ i \neq j)$ の根軸[2] を $\ell(i, j)$ と表す．このとき，次が成り立つ．

命題. 1. 根軸 $\ell(i, j)$ は全て一致し，△ABC の外心 O を通る．

2. ３円 Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ のうち，２つが共有点を持つなら，もう１つもその共有点を通る．



証明. $\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$，$\mathrm{C}(x_3, y_3)$ とすると，円 Γ_1 の中心 O_1 は，線分 AB を $a^2 : b^2$ に外分する点であり，半径は，$r_1 = \sqrt{\mathrm{O_1A} \cdot \mathrm{O_1B}}$ と表すことができるので，

$$f_1(x, y) = \left(x - \frac{-b^2x_1 + a^2x_2}{a^2 - b^2}\right)^2 + \left(y - \frac{-b^2y_1 + a^2y_2}{a^2 - b^2}\right)^2 - \left(\frac{ab}{a^2 - b^2}\right)^2 \{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}$$

とおくと，Γ_1 の方程式は，$f_1(x, y) = 0$ と表される．同様に，

$$f_2(x, y) = \left(x - \frac{-c^2x_2 + b^2x_3}{b^2 - c^2}\right)^2 + \left(y - \frac{-c^2y_2 + b^2y_3}{b^2 - c^2}\right)^2 - \left(\frac{bc}{b^2 - c^2}\right)^2 \{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2\},$$

$$f_3(x, y) = \left(x - \frac{-a^2x_3 + c^2x_1}{c^2 - a^2}\right)^2 + \left(y - \frac{-a^2y_3 + c^2y_1}{c^2 - a^2}\right)^2 - \left(\frac{ca}{c^2 - a^2}\right)^2 \{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2\}$$

とおくことで，Γ_2，Γ_3 の方程式はそれぞれ，$f_2(x, y) = 0$，$f_3(x, y) = 0$ と表される．

[1] アポロニウスの円 https://gleamath.com/Apolloniuss-circle/
[2] 根軸と根軸定理 https://gleamath.com/radical-axis-thm/

方べきの値と，根軸の定義を思い出す[3]．点 (p,q) と，円 Γ_i に対する方べきの値が，

$$f_i(p,q) \tag{1}$$

と書けることに注意すると，２つの円 Γ_i，Γ_j で定まる根軸 $\ell(i,j)$ の方程式は，

$$f_i(x,y) - f_j(x,y) = 0 \tag{2}$$

と書ける．

$\triangle$ABC の外心を O$(0,0)$，外接円の半径を r としても一般性を失わないので，これを仮定する．このとき，$i = 1,2,3$ に対して，$x_i^2 + y_i^2 = r^2$ であることに注意すると，簡単な計算で，$f_i(0,0) = r^2$ が成り立つことが確認できる．これから，$i = 1,2,3,\ j = 1,2,3\ (i \neq j)$ に対して，

$$f_i(0,0) - f_j(0,0) = r^2 - r^2 = 0$$

が成り立つので，３本の根軸 $\ell(1,2)$，$\ell(2,3)$，$\ell(3,1)$ は，全て外心 O を通ることがわかる．一方，３円 $\Gamma_i\ (i = 1,2,3)$ の中心 O_i が，$\triangle$ABC の各辺の外分点であることと，メネラウスの定理の逆から，O_i たちは一直線に並ぶことがわかる[4]が，これと根軸定理[5] から，$\ell(1,2)$，$\ell(2,3)$，$\ell(3,1)$ は全て平行なので，一致することがわかる．以上から，１つ目の主張が従う．

$\ell(1,2)$，$\ell(2,3)$，$\ell(3,1)$ が一致することを上で見たので，この直線を ℓ と表す．２つ目の主張を示すために，まずは次の補題を証明する．

補題． 同心円でない２円 Γ_1，Γ_2 と，これらから定まる根軸 ℓ に対して，次が成り立つ．

Γ_1，Γ_2，ℓ の共有点は，（存在しない場合も含めて）一致する．

証明． 円周上の点とその円に対して定まる方べきの値は 0 であることに注意すると，

(i) 点 (p,q) が Γ_1 上の点である．$\iff f_1(p,q) = 0$.

(ii) 点 (p,q) が Γ_2 上の点である．$\iff f_2(p,q) = 0$.

(iii) 点 (p,q) が ℓ 上の点である．$\iff f_1(p,q) - f_2(p,q) = 0$.

が成り立つ．これから，上の (i)，(ii)，(iii) のうち２つを仮定すると，もう１つが従うことがわかる．よって，３つの図形 Γ_1，Γ_2，ℓ のうち，いずれか２つが共有点を持つことを仮定し，その共有点の座標を (p,q) とすると，以上の理由から，もう１つの図形は，(p,q) を通ることがわかる．これから，３つの図形 Γ_1，Γ_2，ℓ のうち，いずれか２つが共有点を持たない場合は，もう１つの図形も共有点を持たないことも従う． □

Γ_1，Γ_2 が共有点を持つと仮定する．上の補題から，根軸 ℓ はその共有点を通る．今 ℓ は，Γ_2 と Γ_3 から定まる根軸でもあるので，再び上の補題から，Γ_2 と ℓ の共有点を Γ_3 は通る．以上より，２つ目の主張が従う． □

補足． 上の命題は，どのような場合に $\Gamma_i\ (i = 1,2,3)$ が共有点を持つかという問いには答えていない．しかし，$\triangle$ABC が正三角形であって，$|b-c| \leq a \leq b+c$ が成り立つ場合には，共有点を持つことが知られている[6]（等号成立の場合の共有点は１つ）．

---

[3] **根軸**とは，同心円でない２つの円に対する方べきの値が等しい点の集まりのことをいう．ここで，**方べき（の値）**とは，円と点に対して決まる次の値のことを言う：(方べきの値) = (点と円の中心の距離)^2 − (円の半径)^2.

[4] アポロニウスの円 とメネラウスの定理 https://gleamath.com/Apolloniuss-circle-and-Menelaus-thm/

[5] どの２つも同心円でない３つの円 $\Gamma_i\ (i = 1,2,3)$ に対して，Γ_1 と Γ_2，Γ_2 と Γ_3，Γ_3 と Γ_1 の根軸をそれぞれ $\ell(1,2)$，$\ell(2,3)$，$\ell(3,1)$ とする．このとき，$\Gamma_i\ (i = 1,2,3)$ の中心が一直線に並ぶなら，$\ell(1,2)$，$\ell(2,3)$，$\ell(3,1)$ は平行であり，そうでない場合は，１点で交わる．

[6] 数学セミナー 2020.11 エレガントな解答をもとむ