アポロニウスの円

線分の端点からの距離の比が等しい点の軌跡を考察する．すなわち，次の問題を考える．

問題． 2 点 A，B に対して，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:n$$

を満たす点 P の軌跡を求めよ．ただし，m,n は正の実数とし，$m\neq n$ であるとする．

補足． 容易にわかるように $m=n$ の場合，点 P の軌跡は，線分 AB の垂直二等分線である．

結論を先に述べておく．上の問題の答えは次の通りである．

解． 線分 AB を $m^2:n^2$ に外分する点を O とすると，点 P の軌跡は，

$$\text{点 O を中心とする半径 } \sqrt{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}} \text{ の円}$$

である．（このような円を**アポロニウスの円**という．）

証明．A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)，P(x,y) とする．点 P が満たすべき条件は，$n^2\mathrm{AP}^2=m^2\mathrm{BP}^2$ と書き換えられるので，これから，次のように x,y の方程式が得られる．

$$n^2\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}=m^2\{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\}$$

$m\neq n$ に注意して，これを整理しよう．

$$\begin{aligned}
n^2\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}-m^2\{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\}&=0\\
(m^2-n^2)(x^2+y^2)-2(m^2x_2-n^2x_1)x-2(m^2y_2-n^2y_1)y&=n^2(x_1^2+y_1^2)-m^2(x_2^2+y_2^2)\\
x^2-2\frac{-n^2x_1+m^2x_2}{m^2-n^2}x+y^2-2\frac{-n^2y_1+m^2y_2}{m^2-n^2}y&=\frac{n^2(x_1^2+y_1^2)-m^2(x_2^2+y_2^2)}{m^2-n^2}\\
\left(x-\frac{-n^2x_1+m^2x_2}{m^2-n^2}\right)^2+\left(y-\frac{-n^2y_1+m^2y_2}{m^2-n^2}\right)^2&=\left(\frac{mn}{m^2-n^2}\right)^2\left\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right\}
\end{aligned}$$

最後の等式の右辺は正なので，この方程式が表す図形は円である．また，線分 AB を $m^2:n^2$ に外分する点 O の座標は，

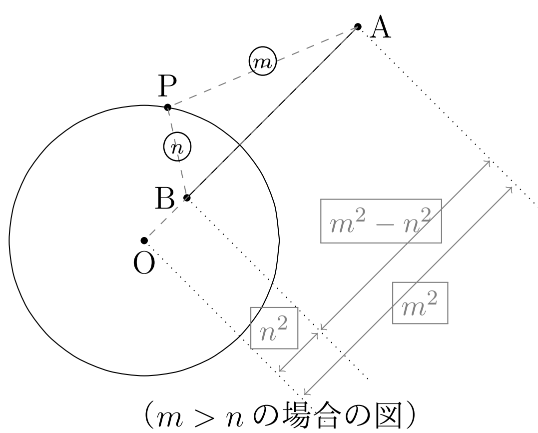
$$\left(\frac{-n^2x_1+m^2x_2}{m^2-n^2},\ \frac{-n^2y_1+m^2y_2}{m^2-n^2}\right)$$

であるから，この円の中心が O であることもわかる．最後に半径を計算する．

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,\\
\mathrm{OA}&=\frac{m^2}{m^2-n^2}\mathrm{AB},\\
\mathrm{OB}&=\frac{n^2}{m^2-n^2}\mathrm{AB}
\end{aligned}$$

であるから，最後の方程式の右辺は次のように計算できる．

$$\left(\frac{mn}{m^2-n^2}\mathrm{AB}\right)^2=\left(\frac{m^2}{m^2-n^2}\mathrm{AB}\right)\left(\frac{n^2}{m^2-n^2}\mathrm{AB}\right)=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$$



（$m>n$ の場合の図）

よって，半径は，$\sqrt{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}$ となり結果が従う． □