虚数の誕生

虚数というものを初めて考えたのは，16 世紀のイタリアの数学者カルダノ（Gerolamo Cardano）だと言われている．まずは，そのきっかけとなった３次方程式の解法の一般論について紹介する．

カルダノの解法（３次方程式の解法）

最高次の係数を１としても一般性を失わないので[a]，３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ を考える．

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

とおく．$x=y-\dfrac{a}{3}$ という変換により得られる y の３次式を $g(y)$ とすると，

$$g(y)=f\left(y-\frac{a}{3}\right)=y^3+\left(-\frac{a^2}{3}+b\right)y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)$$

と計算でき，２次の項がない３次式が得られる．簡単のため，

$$3p=-\frac{a^2}{3}+b,\qquad 2q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$$

とおくと，３次式

$$g(y)=y^3+3py+2q$$

を得る．さらに $y=u+v\neq 0$ とおくと，

$$g(u+v)=u^3+v^3+2q+3(u+v)(uv+p)$$

と計算できる．ここで，次の条件 (1) を考える．

$$\begin{cases} u^3+v^3 &= -2q \\ uv &= -p \end{cases} \tag{1}$$

条件 (1) を満たす組 (u,v) のうちの１つを (u_0,v_0) として，$y_0=u_0+v_0$，$x_0=y_0-\dfrac{a}{3}$ とおくと，

$$f(x_0)=f\left(y_0-\frac{a}{3}\right)=g(y_0)=g(u_0+v_0)=0$$

が成り立つので，この x_0 が３次方程式 $f(x)=0$ の解の１つである．
条件 (1) を満たす組 (u,v) を求めよう．条件 (1) の２つの目の式の両辺を３乗すると，$u^3v^3=-p^3$ を得るが，これと $u^3+v^3=-2q$（条件 (1) の１つの目の式）と，解と係数の関係から，u^3 と v^3 は，２次方程式

$$t^2+2qt-p^3=0$$

の解であることがわかる．２次方程式の解の公式を用いて，

$$u^3=-q+\sqrt{q^2+p^3},\qquad v^3=-q-\sqrt{q^2+p^3} \tag{2}$$

を得る．よって，この (2) を満たし，$uv=-p$（条件 (1) の２つの目の式）を満たす組 (u,v) を求めれば良い．(2) を満たす u，v はそれぞれ３つずつ存在するので，(2) を満たす組 (u,v) は，９組存在するが，このうち，$uv=-p$ を満たす組は３組である[b]．３次方程式 $f(x)=0$ の解は３つ[c]なので，ここで求めた３つの組 (u,v) に対応する x が求める３つの解である．

[a]任意の３次方程式は，x^3 の項の係数で両辺を割ることで，$x^3+ax^2+bx+c=0$ の形にできる．
[b](2) を満たす u が３つあり，それぞれの u に対して，$uv=-p$ から v が定まると考えれば良い．
[c]当時，代数学の基本定理は証明されていなかったが，因数定理を用いると解が３つ以上ないことはわかる．

一般論では，少し分かりにくいかもしれないが，虚数を考える必要性が出てくるのは，上の (2) の部分である．単に，２次方程式を解くだけのときは，無条件に虚数解を無視する（解なし）としても矛盾が生じないが，３次方程式では，確かに実数解が３つ存在するが，その解法の途中で負の平方根が出現するということが起きてしまう．これを具体例[1] で見てみよう．

例. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$ として，３次方程式 $f(x) = 0$ を考える．

$$f(x) = (x-3)(x^2-3)$$

と因数分解できるので，$f(x) = 0$ は，$x = 3, \pm\sqrt{3}$ という３つの実数解をもつ．

この３次方程式にカルダノの解法を適用してみよう．$x = y + 1$ とすると，

$$g(y) = f(y+1) = y^3 - 6y + 4$$

を得る．よって，上の一般論の記号をそのまま用いると，

$$3p = -6, \quad 2q = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p = -2, \quad q = 2$$

である．$y = u + v$ とすると，u^3, v^3 は，２次方程式

$$t^2 + 4t + 8 = 0$$

の解と考えられるので，

$$u^3 = -2 + \sqrt{-4}, \qquad v^3 = -2 - \sqrt{-4} \tag{3}$$

を得る．

ここで虚数が登場するのである！３次方程式 $f(x) = 0$ は確かに３つの実数解を持つのだが，カルダノの解法では，ここで虚数を認めないと計算が進まないのである．一旦，虚数を認めて，解法を続けることにしよう．虚数単位を i とする．

$$u^3 = -2 + 2i, \qquad v^3 = -2 - 2i, \qquad uv = 2 \tag{4}$$

を満たす組 (u, v) を求めれば良い．(4) を満たす組のうち１つを (u_0, v_0) とすると，それが，

$$(u_0, v_0) = (1 + i, 1 - i)$$

であることはすぐにわかる[2]．よって，実数解のうちの１つ

$$x_0 = y_0 + 1 = u_0 + v_0 + 1 = (1+i) + (1-i) + 1 = 3$$

が得られた．虚数を認めることにより，実数解が得られたのである．他の２つの解 $x = \pm\sqrt{3}$ についても同様に (4) を組 (u, v) を求めれば良い．

このようにして，カルダノは，虚数の存在を提唱したが，当時の多くの人々は，この２乗して負の数になるという謎の数の存在を認めていたなったようである．しかし，17 世紀にデカルトが虚数という言葉を初めて使い，18 世紀にはオイラーが，imaginary number の頭文字である i を虚数単位を表すのに使用した．さらに 1799 年のガウスによる「代数学の基本定理[3] 」などにより，徐々に虚数が世に受け入れられるようになったと言われている．

---

[1]実際にカルダノが考えていた具体例ではない．

[2]複素数平面の知識を用いると，$u^3 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ と書けるので，これを満たす u のうち１つが $u_0 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = 1 + i$ であることがわかる．複素数平面を知らなくても，$(1+i)^3$ を計算すると $-2+2i$ になることが確認できる．また，$uv = 2$ は実数であるから，v は u の共役複素数だとわかる．

[3]複素数係数の n 次方程式は複素数の解を（重複を含めて）ちょうど n 個持つ．