コーシー・シュワルツの不等式

- $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) \geqq (a_1b_1+a_2b_2)^2$
  等号成立条件は， $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$.
- $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geqq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$
  等号成立条件は， $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$.

$\vdots$

- $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqq \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2$
  等号成立条件は， $a_1 : \cdots : a_n = b_1 : \cdots : b_n$.

証明. $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_ix - b_i)^2$ とおき，2 次関数 $y = f(x)$ を考える．展開すると，

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

であり，x^2 の係数は正なので，グラフは下に凸である．また，$f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_ix - b_i)^2 \geqq 0$ なので，x 軸とグラフ $y = f(x)$ の共有点の個数は，高々 1 個である．よって，判別式 $D/4$ の値は，0 以下である．

$$\frac{D}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leqq 0$$

が成り立つので，これを解いて，求める不等式が得られる．等号成立は，$D/4 = 0$ の時，すなわち，グラフ $y = f(x)$ が x 軸に接している時である．これは言い換えると，ある x_0 が存在して，$f(x_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_ix_0 - b_i)^2 = 0$ を満たすということであり，全ての $i = 1, \cdots n$ に対して，$a_ix_0 - b_i = 0$ が成り立つということである．このためには，$a_1 : \cdots : a_n = b_1 : \cdots : b_n$ であることが必要であり，逆に $a_1 : \cdots : a_n = b_1 : \cdots : b_n$ であれば，このような x_0 は存在する． □

....

内積を用いた証明（$n = 2, 3$）．どちらも同じなので，$n = 3$ の場合を証明する．
$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とおく．

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \qquad |\overrightarrow{b}| = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}, \qquad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

から，$|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 \geqq (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2$ を示せばよい．$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると，内積の定義から，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ であり，$0 \leqq \cos^2\theta \leqq 1$ に注意すると，

$$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2 = |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\cos^2\theta \leqq |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2$$

が成り立つ．等号成立は，$\cos\theta = \pm 1$ の時であり，これは，（空間において）$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行の時である．すなわち，$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$ が成り立つ時である． □