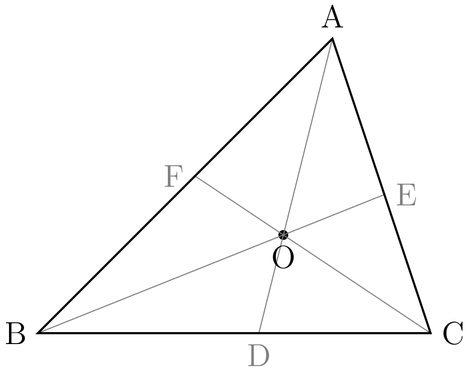
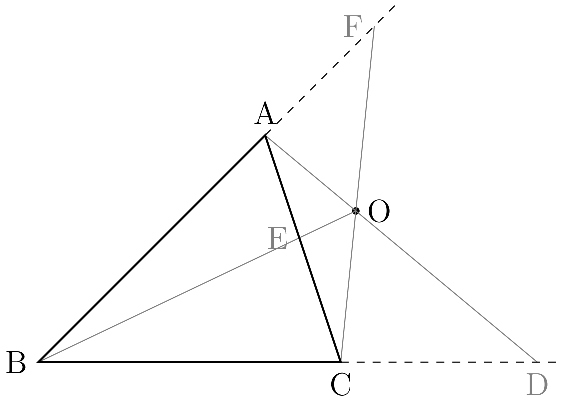
チェバの定理とその逆

定理 (チェバの定理). $\triangle$ABC と各辺上またはその延長線上にない点 O に対して，各頂点 A, B, C から点 O に引いた直線と，それぞれの対辺（またはその延長線）との交点を D, E, F とするとき，次が成り立つ．

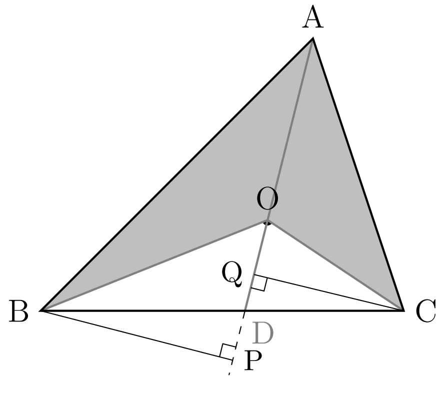
$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \cdot \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$$





注意. 上の定理において，左側の図は点 O が $\triangle$ABC の内部にある場合であり，右側の図は点 O が $\triangle$ABC の外部にある場合である．チェバの定理は，このどちらの場合に対しても成り立つ．

証明. 以下では，$\triangle$ABC などの面積もまた $\triangle$ABC と書くことにする．２点 B, C から，直線 AO に下ろした垂線の足をそれぞれ P, Q とすると，



$$\triangle\mathrm{ABO} : \triangle\mathrm{ACO} = \mathrm{BP} : \mathrm{CQ}$$

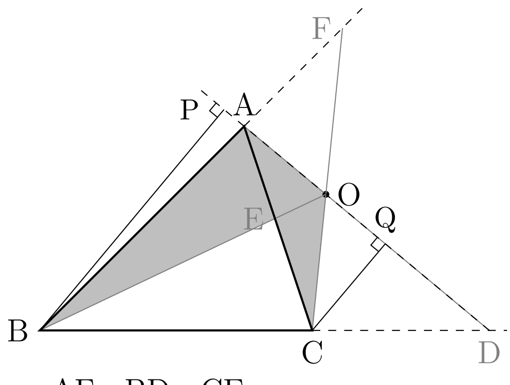
が成り立つ．さらに，$\triangle$BPD と $\triangle$CQD は相似なので，

$$\mathrm{BP} : \mathrm{CQ} = \mathrm{BD} : \mathrm{CD}$$

が成り立つ．以上から，

$$\triangle\mathrm{ABO} : \triangle\mathrm{ACO} = \mathrm{BD} : \mathrm{CD} \iff \frac{\triangle\mathrm{ABO}}{\triangle\mathrm{ACO}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}} \qquad (1)$$

が成り立つ．同様に考えて，



$$\frac{\triangle\mathrm{BCO}}{\triangle\mathrm{BAO}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AE}}, \qquad (2)$$

$$\frac{\triangle\mathrm{CAO}}{\triangle\mathrm{CBO}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{BF}} \qquad (3)$$

も成り立つので，等式 (1),(2),(3) の両辺を掛け合わせることで，

$$\frac{\triangle\mathrm{ABO}}{\triangle\mathrm{ACO}} \cdot \frac{\triangle\mathrm{BCO}}{\triangle\mathrm{BAO}} \cdot \frac{\triangle\mathrm{CAO}}{\triangle\mathrm{CBO}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AE}} \cdot \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{BF}} \iff \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \cdot \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$$

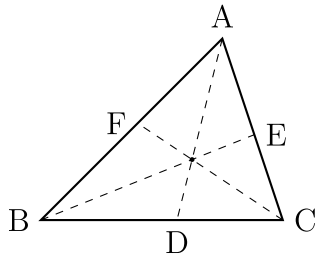
が従う． □

定理 (チェバの定理の逆)．$\triangle\mathrm{ABC}$ において，

- 各頂点 A, B, C の対辺上にある点 D, E, F に対して，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

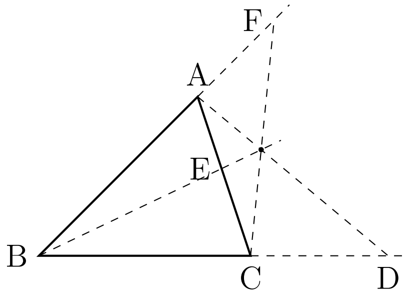
  が成り立つならば，3 直線 AD, BE, CF は 1 点で交わる．ただし，点 D, E, F は頂点ではないとする．



- 各頂点 A, B, C の対辺または，その延長線上にある点 D, E, F のうち，2 点が延長線上にあり，もう 1 点は辺上にあるとする．さらに，3 直線 AD, BE, CF は，どの 2 直線も互いに平行でないとする．このとき，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

  が成り立つならば，3 直線 AD, BE, CF は 1 点で交わる．ただし，点 D, E, F は頂点ではないとする．



注意． 上の定理の 2 つ目の主張の図について，これは，2 点 D, F がそれぞれ，辺 BC の延長線上の C 側，辺 AB の延長線上の A 側にあり，1 点 E が辺 CA 上にある場合の図である．定理の仮定を満たす場合はこの他にも沢山あり，それぞれの図は一見異なるように見えるので，ここにあげた場合の図の形に囚われてないけない．

証明．2 つの主張の証明は同じなので，まとめて証明する．仮定から，2 直線 AD, BE は平行でないので，その交点を O とする．直線 CO と直線 AB との交点を F′ とすると，チェバの定理より，

$$\frac{\mathrm{AF'}}{\mathrm{F'B}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

が成り立つ．これと，定理の仮定の等式を比較することで，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=\frac{\mathrm{AF'}}{\mathrm{F'B}} \iff \mathrm{AF}:\mathrm{FB}=\mathrm{AF'}:\mathrm{F'B}$$

が成り立つ．2 点 F, F′ はどちらも直線 AB 上の点なので，F = F′ が従う． □

…………………………………………………………………………………

チェバの定理は，三角形と点に関する定理であると言える．点 O の位置により，考える図形の形が変わるので，図形の形に囚われすぎないように注意する．例えば，下に示すように，

頂点 → 交点 → 頂点 → 交点 → 頂点 → ⋯

と点をたどることにより，定理の等式

$$\frac{①}{②}\cdot\frac{③}{④}\cdot\frac{⑤}{⑥}=1 \iff \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

が得られることも知っておくと良い．