## ド・モルガンの法則

**定理.** 2つの集合 $A, B$ に対して，次が成り立つ.

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

証明. 1つ目を示す. $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ かつ $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$ を示せば良い.

($\subset$) $x \in \overline{A \cup B}$ を仮定すると，

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Longrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Longrightarrow x \notin A \text{ かつ } x \notin B \\ &\Longrightarrow x \in \overline{A} \text{ かつ } x \in \overline{B} \\ &\Longrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

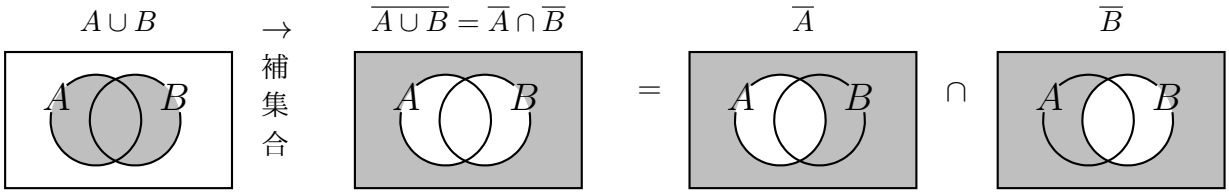
が成り立つ.
よって，$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ が従う.

($\supset$) $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ を仮定すると，

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \cap \overline{B} &\Longrightarrow x \in \overline{A} \text{ かつ } x \in \overline{B} \\ &\Longrightarrow x \notin A \text{ かつ } x \notin B \\ &\Longrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Longrightarrow x \in \overline{A \cup B} \end{aligned}$$

が成り立つ.
よって，$\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$ が従う.

以上より，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ が従う.




2つ目を示す. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ かつ $\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$ を示せば良い.

($\subset$) $x \in \overline{A \cap B}$ を仮定すると，

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\Longrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Longrightarrow x \notin A \text{ または } x \notin B \\ &\Longrightarrow x \in \overline{A} \text{ または } x \in \overline{B} \\ &\Longrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

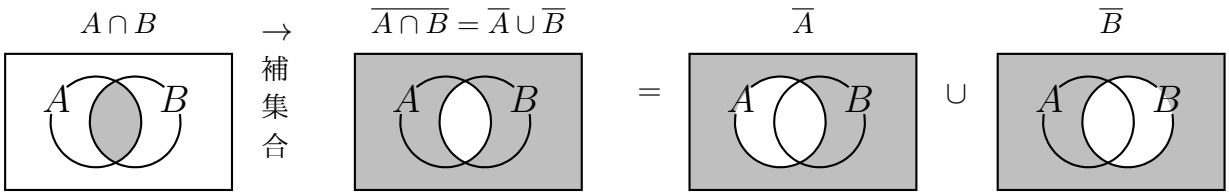
が成り立つ.
よって，$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ が従う.

($\supset$) $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ を仮定すると，

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \cup \overline{B} &\Longrightarrow x \in \overline{A} \text{ または } x \in \overline{B} \\ &\Longrightarrow x \notin A \text{ または } x \notin B \\ &\Longrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Longrightarrow x \in \overline{A \cap B} \end{aligned}$$

が成り立つ.
よって，$\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$ が従う.

以上より，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ が従う.




□