ラグランジュ補間

ラグランジュの補間公式

定理. 座標平面上の x 座標が相異なる $n+1$ 個の点

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \cdots\ ,P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$$

に対して，これら全ての点を通る n 次以下の（多項式）関数 $y = L(x)$ が，ただひとつ存在して，

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \ell_k(x)$$

と表される．ここで，

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

である．（$\ell_k(x)$ の積は，k を除く 1 から $n+1$ の自然数をわたる．）

定義. $L(x)$ を，**ラグランジュ型の補間多項式**といい，$\ell_k(x)$ を，**ラグランジュ基底多項式**という．

補足. 与えられたいくつかの点を多項式で補間することを**多項式補間**といい，その多項式を**補間多項式**という．ラグランジュの補間公式は，ラグランジュ基底多項式 $\ell_k(x)$ の線形結合により，補間多項式を与える公式である．この公式によって与えられた補間多項式 $L(x)$ をラグランジュ型の補間多項式という．

証明. まずは，$y = L(x)$ が，$n+1$ 個の点 $P_1, \cdots P_{n+1}$ を通ることを示す．$j = 1, \cdots, n+1$ に対して，

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

が成り立つので，

$$L(x_j) = 0 + \cdots + 0 + y_j + 0 + \cdots + 0 = y_j$$

が成り立つ．次に一意性を示す．そのために，n 次以下の関数 $y = L'(x)$ が，$n+1$ 個の点 $P_1, \cdots P_{n+1}$ を通ると仮定すると，$j = 1, 2, \cdots, n+1$ に対して，

$$L(x_j) - L'(x_j) = y_j - y_j = 0$$

が成り立つ．$L(x_j) - L'(x_j)$ の最高次の係数を a とすると，因数定理から，

$$L(x_j) - L'(x_j) = a(x - x_1) \cdots (x - x_{n+1})$$

と因数分解できる．ここで，左辺は n 次以下なので，$a \neq 0$ なら，右辺は $n+1$ 次となり矛盾である．よって，$a = 0$ であり，$L(x) = L'(x)$ が従う． □

例. 4 点 $P_1(-2, -1)$，$P_2(-1, 4)$，$P_3(0, 3)$，$P_4(1, 2)$ を通る 3 次関数を求める．各々の点に対するラグランジュ基底多項式は，

$$\ell_1(x) = \frac{x^3 - x}{-6}, \qquad \ell_2(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{2},$$

$$\ell_3(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{-2}, \quad \ell_4(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6}$$

であり，求める 3 次関数は

$$\begin{aligned} L(x) &= -\ell_1(x) + 4\ell_2(x) + 3\ell_3(x) + 2\ell_4(x) \\ &= x^3 - 2x + 3 \end{aligned}$$

と計算できる．