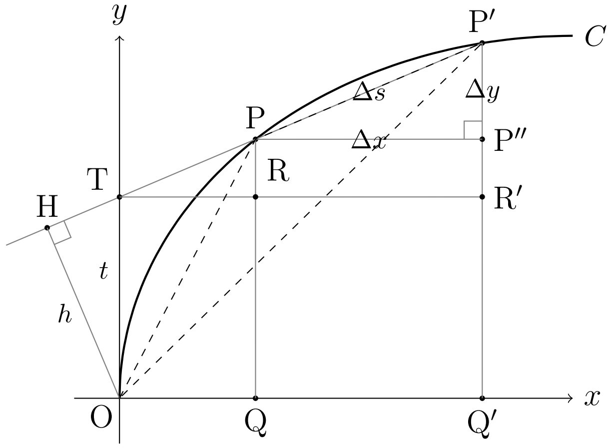
LEIBNIZ の固有三角形と４分円の面積

1673 年頃，ライプニッツは，曲線で囲まれる図形の面積を求める際に，それまでの限りなく小さい長方形に細分するという方法ではなく，ひとつの頂点を共有する微小三角形に細分するという方法に着想した．そこに現れる相似な三角形の組のことを固有三角形（**triangula characteristica**）と名付け，積分の変換定理を確立したのであった．



原点 O を通る曲線 $C : y = f(x)$ を考える．C 上に点 P, P' を取り，直線 PP' と y 軸の交点を T とし，この直線に原点 O から下ろした垂線の足を H とする．点 P, P' から x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ Q, Q' とする．また点 T を通り x 軸に平行な直線と，2 直線 $\mathrm{PQ}, \mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ との交点をそれぞれ R, R' とする．さらに右図のように $\triangle\mathrm{PP}'\mathrm{P}''$ が直角三角形となるように点 P'' を定める．

点 P の座標を $\mathrm{P}(x, y)$ として，線分 PP''，$\mathrm{P}'\mathrm{P}''$，PP' の長さをそれぞれ Δx，Δy，Δs とする．ここで Δx は限りなく小さいとしておく．また，線分 OH，OT の長さをそれぞれ h，t とする．

$\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ と TO は平行より，$\angle\mathrm{PP}'\mathrm{P}'' = \angle\mathrm{OTH}$ なので，$\triangle\mathrm{PP}'\mathrm{P}''$ と $\triangle\mathrm{OTH}$ は相似である．ライプニッツは，この相似な三角形のことを固有三角形と名付けた．以上により，

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{t}{h}$$

が成り立つことに注意すると，

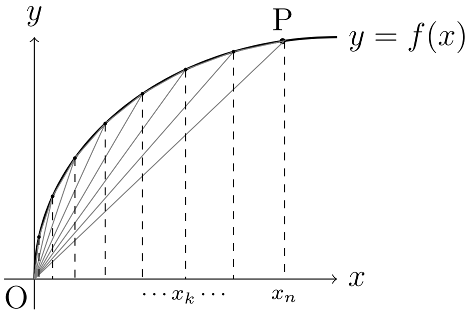
$$\triangle\mathrm{PP}'\mathrm{P}'' = \frac{1}{2}h\Delta s = \frac{1}{2}t\Delta x = \frac{1}{2}\square\mathrm{QQ}'\mathrm{R}'\mathrm{R}$$

が成り立つ[1]．これを有限変換定理という．

t, y を x の関数とみて，$t = t(x)$，$y = y(x)$（$= f(x)$）と表す．点 $\mathrm{P}(x, y(x))$ であった．曲線 C と直線 OP で囲まれる部分を Σ とし，その面積も Σ で表す．
右図のように，Σ を原点 O を共有する三角形で細分する．$\Delta x = \dfrac{x}{n}$ とし，$x_k = k\Delta x \quad (k = 0, \cdots, n)$ とする．すなわち，$x = x_n$ である．（現代の記号を用いると[2]）有限変換定理から，

$$\Sigma = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} t(x_k)\Delta x = \frac{1}{2}\int_0^x t(x)dx$$

が成り立つ．これを変換定理という．



このように，Σ の求積において，$t(x)$ が重要な役割をすることがわかる．ライプニッツは，特に，この変数 $t(x)$ を **resecta** と名付けた．

はじめの図において，直線 HP'' の傾きが $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ であることに注意し，線分 PQ に着目することで，$\mathrm{RQ} = \mathrm{PQ} - \mathrm{PR}$ から，

$$t(x) = y(x) - x\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow y(x) - xy'(x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

を得る．ここで，$y'(x)$ は，$y(x)$ の導関数である．

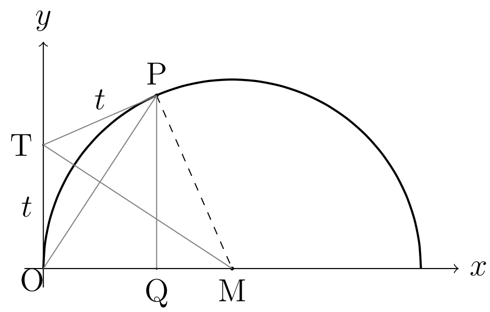
$y'(x)$ は，点 P における接線の傾きであるから，上の関係式は，resecta $t(x)$ を介して，求積問題と接線問題をつなげる重要な関係式であると見ることができる．

[1] $\triangle\mathrm{PP}'\mathrm{P}''$ などの面積もまた，$\triangle\mathrm{PP}'\mathrm{P}''$ と表している．

ライプニッツは，上で述べた変換定理を４分円に適用し，その面積の級数を用いた表示に成功した．今日では，４分円の面積は $\frac{\pi}{4}$ であることが知られているので，この級数表示は，π の級数表示としても有名である．

中心が $\mathrm{M}(a,0)$ で半径が a の半円 $(x-a)^2+y^2=a^2$ を考える．点 $\mathrm{P}(x,y)$ とし，点 P を接点とする接線と y 軸との交点を $\mathrm{T}(0,t)$ とする．また，点 P から x 軸に下ろした垂線の足を Q とする．直線 TP，TO は共に，接線であることから，$\mathrm{TP}=\mathrm{TO}=t$ が従う．

半円の方程式は，$y^2=x(2a-x)$ と変形できることに注意し，$\triangle\mathrm{TMO}$ と $\triangle\mathrm{OPQ}$ は，相似[3] であることを用いると，



$$\frac{t}{a}=\frac{x}{y}=\frac{xy}{y^2}=\frac{y}{2a-x}$$

が成り立つ．この等式から，resecta $t=t(x)$ をパラメータとする x,y の表示

$$x=x(t)=\frac{2at^2}{a^2+t^2}\quad,\quad y=y(t)=\frac{2a^2t}{a^2+t^2}$$

を得る．

半円と直線 OP で囲まれる部分を Σ とすると，（現代の記号を用いると [2]）変換定理から，

$$\Sigma=\frac{1}{2}\int_0^x t(x)dx=\frac{1}{2}\left\{tx-\int_0^t x(t)dt\right\}=\frac{1}{2}tx-a\int_0^t\frac{t^2}{a^2+t^2}dt$$

が成り立つ．（２つ目の等号については，下の注釈 [4] を参照．）ここで，最右辺の積分は，

$$\int_0^t\frac{t^2}{a^2+t^2}dt=\int_0^t\frac{\left(\frac{t}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}dt=\int_0^t\left\{\left(\frac{t}{a}\right)^2-\left(\frac{t}{a}\right)^4+\cdots\right\}dt=a\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{t}{a}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{t}{a}\right)^5+\cdots\right\}$$

と級数展開できる [5]．これにより，$tx+ay=2at$ に注意すると，扇型 OMP の面積は，

$$\begin{aligned}\Sigma+\triangle\mathrm{OMP}&=\frac{1}{2}tx-a\int_0^t\frac{t^2}{a^2+t^2}dt+\frac{1}{2}ay\\&=at-a^2\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{t}{a}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{t}{a}\right)^5+\cdots\right\}=a^2\left\{\left(\frac{t}{a}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{t}{a}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{t}{a}\right)^5+\cdots\right\}\end{aligned}$$

となる．最後に，$a=t=1$ とすることで，（単位円の）４分円の面積は，

$$\int_0^1 y(x)dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

と求められる．この右辺の級数は，**グレゴリー・ライプニッツ級数**と呼ばれている．もし直接に左辺の積分を行おうとすると，$\int_0^1\sqrt{x(2a-x)}dx$ という無理式の積分を扱わなければならない．これをライプニッツは変換定理により乗り越えたのである．また，（単位円の）４分円の面積は，$\frac{\pi}{4}$ であることを用いると，次の良く知られた π の級数表示が得られる．

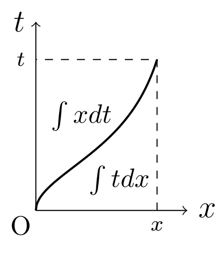
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

---

[2] 記号 $\int$ は，ライプニッツによるものだが，この時期はまだ使われていなかった．

[3] TM と OP の交点を N とする．$\triangle\mathrm{TMO}$ と $\triangle\mathrm{OMN}$ は，$\angle\mathrm{O}=\angle\mathrm{N}=90^\circ$ で $\angle\mathrm{M}$ は共通であるから相似である．さらに，$\triangle\mathrm{OMN}$ と $\triangle\mathrm{OPQ}$ は，$\angle\mathrm{N}=\angle\mathrm{Q}=90^\circ$ で $\angle\mathrm{O}$ は共通であるから相似である．よって，$\triangle\mathrm{TMO}$ と $\triangle\mathrm{OPQ}$ は，相似である．

[4] $x=x(t)$ が単調増加であることに注意すると右図が得られる．これにより，$\int t(x)dx=tx-\int x(t)dt$ が従う．



[5] メルカトル「対数計算術」(1668) により，この級数展開はライプニッツにおいて既知であった．