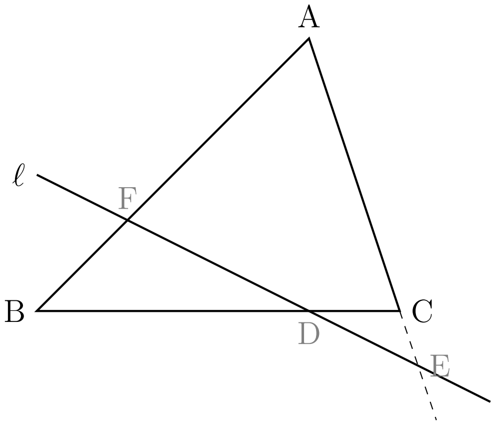
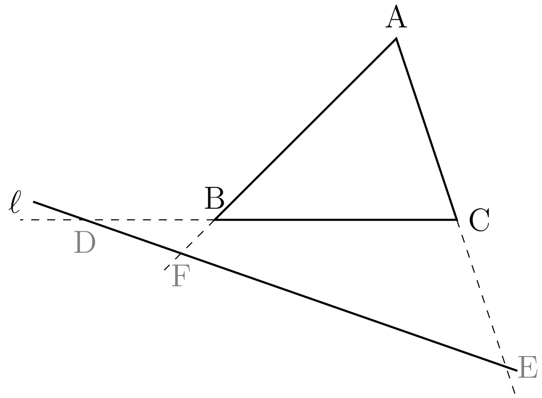
メネラウスの定理とその逆

定理 (メネラウスの定理)**.** $\triangle$ABC と，その頂点を通らず，どの辺とも平行でない直線 ℓ に対して，各頂点 A, B, C の対辺（またはその延長線）と，直線 ℓ の交点をそれぞれ D, E, F とするとき，次が成り立つ．

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$





注意. 上の定理において，左側の図は直線 ℓ が $\triangle$ABC の 2 辺と交わる場合であり，右側の図は直線 ℓ が $\triangle$ABC のどの辺とも交わらない場合である．メネラウスの定理は，このどちらの場合に対しても成り立つ．

証明. 直線 ℓ に平行であり，1 つの頂点を通りその対辺と交わる直線を ℓ' とする．直線 ℓ' が通る頂点が C である場合を証明すれば十分である[1]．

直線 ℓ' と辺 AB の交点を P とする．$\triangle$ACP と $\triangle$AEF は相似なので，

$$\mathrm{CE}:\mathrm{EA}=\mathrm{PF}:\mathrm{FA} \iff \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{FA}} \tag{1}$$

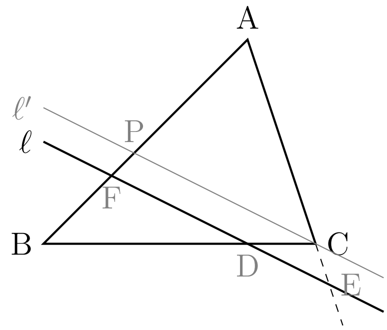
が成り立つ．また，$\triangle$BDF と $\triangle$BCP は相似なので，

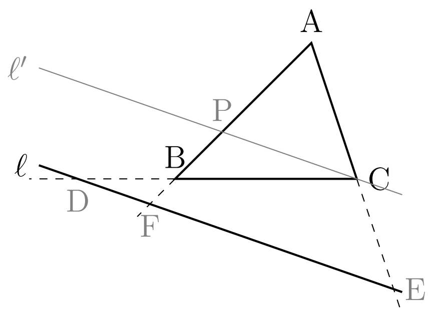
$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{BF}:\mathrm{FP} \iff \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FP}} \tag{2}$$

が成り立つ．等式 (1),(2) に注意することで，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FP}}\cdot\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{FA}}=1$$

が従う．





□

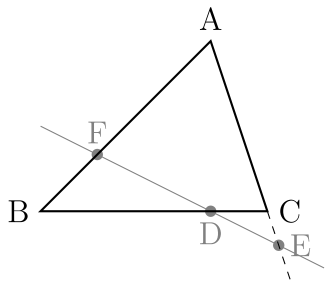
[1] 直線 ℓ と $\triangle$ABC の位置関係により，直線 ℓ' が通る頂点は C とは限らないが，これは単に記号の付け方の問題である．

定理 (メネラウスの定理の逆). $\triangle$ABC において,

- 各頂点 A, B, C の対辺または,その延長線上にある点 D, E, F のうち,2 点が辺上にあり,もう 1 点は延長線上にあるとする.このとき,

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

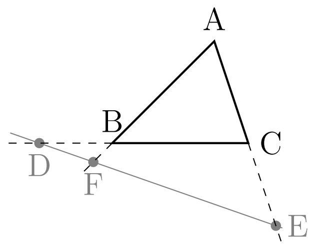
が成り立つならば,3 点 D, E, F は一直線上にある.ただし,点 D, E, F は頂点ではないとする.



- 各頂点 A, B, C の対辺の延長線上にある点 D, E, F に対して,

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

が成り立つならば,3 点 D, E, F は一直線上にある.



証明.2 つの主張の証明は同じなので,まとめて証明する.まず,3 点 D, E, F のうち 2 点を通り,$\triangle$ABC のある辺と平行な直線が存在しない事を示す.そのために,直線 FD と直線 AC が平行であると仮定して矛盾を導く[2].2 点 F, D はどちらも辺上の点であるか,延長線上の点でなければならないことに注意する (そうでないと,辺 AC と平行にはなり得ない).背理法の仮定から,$\triangle$BFD と $\triangle$BAC は相似なので,

$$\mathrm{AF}:\mathrm{FB}=\mathrm{CD}:\mathrm{DB}\iff\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}}\iff\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=1$$

が成り立つ.これと定理の仮定の等式を合わせて,$\mathrm{CE}=\mathrm{EA}$ が従い,点 E は,辺 AC の中点でとなるが,これは定理の仮定に矛盾である.

2 直線 FD,AC は平行でないので,これらの交点を,E′ とすると,メネラウスの定理から,

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE'}}{\mathrm{E'A}}=1$$

が成り立つ.これと定理の仮定の等式を比較することで,

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=\frac{\mathrm{CE'}}{\mathrm{E'A}}\iff\mathrm{CE}:\mathrm{EA}=\mathrm{CE'}:\mathrm{E'A}$$

が成り立つ.2 点 E, E′ はどちらも直線 AC 上の点なので,$\mathrm{E}=\mathrm{E'}$ が従う. □

....

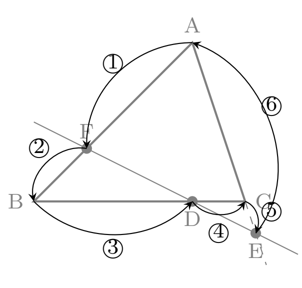
メネラウスの定理は,三角形と直線に関する定理であると言える.直線 ℓ の位置により,考える図形の形が変わるので,図形の形に囚われすぎないように注意する.例えば,下に示すように,

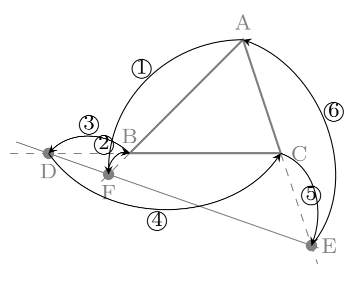
頂点 → 交点 → 頂点 → 交点 → 頂点 → $\cdots$

と点をたどることにより,定理の等式

$$\frac{①}{②}\cdot\frac{③}{④}\cdot\frac{⑤}{⑥}=1\iff\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

が得られることも知っておくと良い.





[2]他の 2 点と他の辺が平行であると仮定しても同様に矛盾を導くことができる.