ネイピア数の２つの定義

ネイピア数[1] や自然対数の底[2] と呼ばれる無理数

$$e = 2.71828182845904523536028747135\cdots$$

の２つの定義を紹介し，それらが同値である事を証明する．まずは１つ目の定義を述べる．

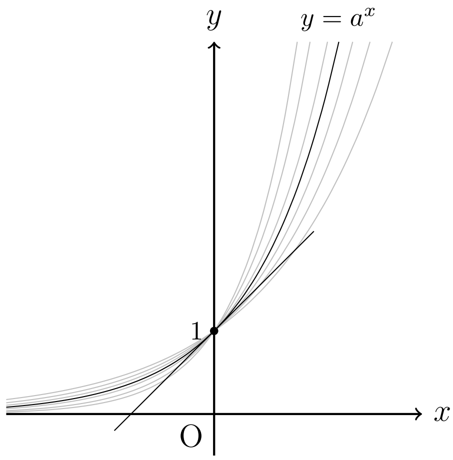
定義 1. 極限値 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ が存在する[3] ので，その値を e と定める．すなわち

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

と定義する．

次に２つ目の定義を述べるための準備を行う．

$a > 1$ とする．関数 $y = a^x$ において，a の値に関わらず，点 $(0, 1)$ は，この関数上の点である．そこで，$y = a^x$ 上の点 $(0, 1)$ における接線の傾きが１となるような実数 a を考えることができる．$y = a^x$ のグラフの形から，このような a がただ１つ存在することがわかる（右図を参照）．$f(x) = a^x$ とすると，$f(x)$ は，（実数全体で）微分可能であり，微分の定義から，



$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$$

なので，点 $(0, 1)$ における接線の傾きは，

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$$

となる．以上から，次のようにネイピア数を定義することができる．

定義 2. $a > 1$ とする．$y = a^x$ 上の点 $(0, 1)$ での接線の傾きが１となるような a の値を e と定める．すなわち，

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} = 1$$

を満たす a の値を e と定義する．

ネイピア数の２つの定義が同値である事を示すために，補題を１つ用意する[4]．

補題. 次が成り立つ．

$$\lim_{h\to 0}\log(1+h)^{\frac{1}{h}} = \log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$$

証明．$f(X) = \log X$ とおく．$\log X$ は，（正の実数上）連続関数なので，正の実数 α に対して，連続関数の定義から，

$$\lim_{X\to\alpha} f(X) = f(\alpha) = f\left(\lim_{X\to\alpha} X\right) \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は正の実数に収束することから，この極限値を α とおき，さらに，上の等式 (1) において，$X = (1+h)^{\frac{1}{h}}$ と見ることで，主張が従う． □

---

[1]スコットランドの数学者 John Napier に由来する．

[2]e を底とする対数を自然対数と呼ぶのであって，e の事を自然対数の底と呼ぶのは，少し変な気もする．

[3]残念ながら，$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ が収束することの証明は高校数学の範囲を超えてしまう．これについては，ネイピア数の定義（極限値の存在）https://gleamath.com/Napiers-constant02 を参照．

[4]この補題の証明にも注釈 [3] で述べた事実を使用している．よって，ネイピア数の２つの定義の同値性を示したからといって，注釈 [3] の事実が証明できたというわけではない．

それでは，2 つの定義が同値である事を証明する．以下では，あえて自然対数の底を明記する．すなわち，$\log X$ を $\log_e X$ と書く．

定理. ネイピア数の 2 つの定義は同値である．すなわち，次が成り立つ．

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \iff \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

証明．(⇒) $e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ とする．両辺の自然対数をとることで，

$$\log_e e = \log_e\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right) \tag{2}$$

が成り立つ．左辺は 1 であり，右辺は，補題を適用することで，

$$\log_e\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right) = \lim_{h\to 0}\log_e(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)-\log_e 1}{h}$$

と計算できる．ここで，$f(x) = \log_e x$ とすると，さらに右辺は，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)-\log_e 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$$

となり，等式 (2) は，$f'(1) = 1$ すなわち，

$$y = f(x) \text{ のグラフの点 } (1,0) \text{ における接線の傾きが } 1 \text{ である} \tag{3}$$

事を示している．$g(x) = e^x$ とおくと，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ は互いに逆関数であるので，(3) から，

$$y = g(x) \text{ のグラフの点 } (0,1) \text{ における接線の傾きが } 1 \text{ である} \tag{4}$$

すなわち，$g'(0) = 1$ が成り立つ．よって，

$$1 = g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

が成り立つ．

(⇐) 上の議論の逆を辿るだけである．$\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = 1$ とする．$g(x) = e^x$ とすると，

$$1 = \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = g'(0)$$

から，(4) が成り立つ．よって，$f(x) = \log_e x$ とおくと，(3) が成り立つ．すなわち，$f'(1) = 1$ であり，これから，

$$1 = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)-\log_e(1)}{h} = \cdots = \log_e\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$$

が成り立つ．$1 = \log_e e$ なので，等式 (2) が成り立ち，$\log_e x$ の単調性から，

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

が従う．

□