ネイピア数の定義（極限値の存在）

ネイピア数[1] や自然対数の底と呼ばれる無理数 $e = 2.71828182845904523536\cdots$ は，極限値

$$e := \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \tag{1}$$

として定義されるのであった．本稿では，この定義の正当性を確認する．すなわち，次を証明する．

定理. 極限値

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

が存在する．

定理の証明のために，いくつか補題を用意する．以下では，

$$\text{関数 } f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \text{数列 } a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

とする．

補題 1. 数列 a_n がある値に収束すると仮定すると，関数 $f(x)$ は，$x \to 0$ で同じ値に収束する[2]．

証明. 数列 a_n が，ある実数 α に収束すると仮定する．

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

とおくと，$f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ であり，$x \to \pm 0$ のとき，$\frac{1}{x} \to \pm\infty$ なので，$\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha$ を示すためには，

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \alpha \quad \text{かつ}, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \alpha$$

を示せば良い．まずは，$\lim_{x\to\infty} g(x) = \alpha$ を示す．$x > 0$ を仮定して良い．x に対して，ある自然数 n_x が存在して，$n_x \leq x < n_x + 1$ をみたす．このとき，$\frac{1}{n_x+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n_x}$ であるので，次が成り立つ．

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}$$

ここで，$x \to \infty$ のとき，$n_x \to \infty$ であり，数列 a_n が α に収束するという仮定から，

$$\lim_{n_x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} = \lim_{n_x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+1}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{-1} = \alpha,$$

$$\lim_{n_x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} = \lim_{n_x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x}\left(1+\frac{1}{n_x}\right) = \alpha$$

が成り立つので，はさみうちの原理から，$\lim_{x\to\infty} g(x) = \alpha$ が成り立つ．次に，$\lim_{x\to-\infty} g(x)$ は，

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} g(-x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$$

であり，

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$$

と計算できるので，上の結果を用いて，$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \alpha$ が従う． □

[1] スコットランドの数学者 John Napier に由来する．

[2] 数列の極限と関数の極限の違いには注意しなければならない．これらの詳しい関係については，関数の極限と数列の極限の関係 https://gleamath.com/lim-of-funcs-and-seqs を参照．

補題 2. 任意の自然数 n について，$a_n < 3$ である．すなわち，数列 a_n は上に有界である．

証明．二項定理を用いて，a_n は次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

ここで，$i = 1, 2, \cdots, k-1$ に対して，$\left(1-\dfrac{i}{n}\right) < 1$ であることと，任意の自然数 n に対して，$n! \geq 2^{n-1}$ であること[3]に注意し，等比数列の和の公式を思い出すと，a_n はさらに，

$$
a_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3
$$

と評価できる．よって主張が従う． □

補題 3. 任意の自然数 n について，$a_n < a_{n+1}$ である．すなわち，数列 a_n は単調増加である．

証明．上の (2) 式と同様に，a_{n+1} は，

$$
a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)
$$

と計算でき，さらにこれは，$i = 1, 2, \cdots, k-1$ に対して，$0 < \left(1-\dfrac{i}{n}\right) < \left(1-\dfrac{i}{n+1}\right)$ であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &> 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&> 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&= a_n
\end{aligned}
$$

と評価できる．よって主張が従う． □

最後に，補題 1，2，3 を用いて，定理を証明する．

定理の証明．補題 2，3 から，a_n は上に有界な単調増加数列である．よって，有界単調数列の収束性[4] から，数列 a_n はある値に収束する．このとき，補題 1 から，$x \to 0$ で関数 $f(x)$ は収束する．すなわち，極限値 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ が存在する． □

補足. 定理を証明するために，数列 a_n を考えるというかなり回りくどい議論を行ったが，それは，ネイピア数 e を関数 $f(x)$ の $x \to 0$ での極限値として定義しているからである．はじめから，e を数列 a_n の極限値として定義していれば，補題 1 は不要である．実際，大学の微積分学ではそのように定義されることが多い．

---

[3]数学的帰納法で証明できる．

[4]https://gleamath.com/bounded-monotone-sequence-convergence