パスカルの三角形と二項係数

ここではパスカルの三角形と呼ばれる有名な三角形を紹介する．パスカルの三角形には数学的に興味深い性質が多く含まれているが，そのうち二項係数に関係するものを紹介する．

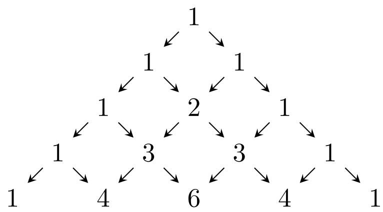
パスカルの三角形

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1
\end{array}
$$

まずは，パスカルの三角形の作り方から紹介する．

- 各行の両端に「1」を記入する．
- 隣合う数字を足し合わせた数を下の行に記入する．

この方法で，どこまでも大きいパスカルの三角形を作ることができる．



パスカルの三角形に潜む多くの興味深い結果が，この単純な作り方に起因しているというのは驚くべきことである．以下では，二項係数との関係を考察する．

パスカルの三角形と二項係数との関係

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1
\end{array}
\quad\longleftrightarrow\quad
\begin{array}{c}
{}_0\mathrm{C}_0\\
{}_1\mathrm{C}_1\quad {}_1\mathrm{C}_0\\
{}_2\mathrm{C}_0\quad {}_2\mathrm{C}_1\quad {}_2\mathrm{C}_2\\
{}_3\mathrm{C}_0\quad {}_3\mathrm{C}_1\quad {}_3\mathrm{C}_2\quad {}_3\mathrm{C}_3\\
{}_4\mathrm{C}_0\quad {}_4\mathrm{C}_1\quad {}_4\mathrm{C}_2\quad {}_4\mathrm{C}_3\quad {}_4\mathrm{C}_4\\
{}_5\mathrm{C}_0\quad {}_5\mathrm{C}_1\quad {}_5\mathrm{C}_2\quad {}_5\mathrm{C}_3\quad {}_5\mathrm{C}_4\quad {}_5\mathrm{C}_5
\end{array}
$$

すなわち，$n \geq 0, r \geq 0$ として，パスカルの三角形における，$n+1$ 行目の左から $r+1$ 番目の数が

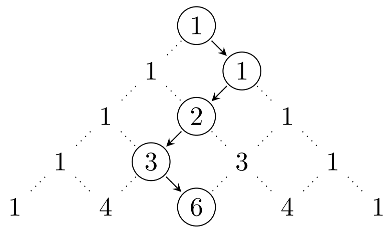
$$
{}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}
$$

となっている．

証明．三角形の頂点から，$n+1$ 行目の左から $r+1$ 番目の数の位置までの最短経路の本数を考える．右下に進むことを「右」と表し，左下に進むことを「左」と表すことにすると，最短経路のうちの 1 つは，

$$
\text{右} \to \text{右} \to \cdots \to \text{右} \to \text{左} \to \text{左} \to \cdots \to \text{左}
$$

と，r 個の「右」と $n-r$ 個の「左」を並べて表せる．よって，このような最短経路の本数は，n 個から r 個選ぶ組合せの総数と考えられる（n 個の枠に r 個の「右」を当てはめる．残りは全て「左」と考えれば良い．）ので，${}_n\mathrm{C}_r$ が従う．



□

上の結果は，次の組合せの公式を使っても証明できる[1].

$$ {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = {}_{n}\mathrm{C}_{r+1} + {}_{n}\mathrm{C}_{r} \tag{1} $$

別証．組合せの公式 (1) とパスカルの三角形の構成方法を対応させる．

- 任意の $n \geq 0$ に対して，$n+1$ 行目の左から $r+1$ 番目の数は，$r=0$ または $r=n$ の時，パスカルの三角形の両端の数を表すので，1 である．一方，${}_{n}\mathrm{C}_{0} = {}_{n}\mathrm{C}_{n} = 1$ なので，両端の数については良い．
- 両端以外の数について，すなわち，$n \geq 2$，$0 < r < n$ を満たす n, r について，パスカルの三角形の作り方から，$n+1$ 行目の左から $r+1$ 番目の数は，n 行目の左から r 番目の数と，n 行目の左から $r+1$ 番目の数の和であるが，これは上で見た組合せの公式 (1) に他ならない．

パスカルの三角形の全ての数は，両端の数から作られるので，以上から結果が従う．□

次にパスカルの三角形の各行の和に関する性質を証明する．

パスカルの三角形の各行の和

$n \geq 0$ に対して，パスカルの三角形における，$n+1$ 行目の全ての数の和は，2^n である．

$$
\begin{array}{l}
1 = 2^0 \\
1 + 1 = 2^1 \\
1 + 2 + 1 = 2^2 \\
1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \\
1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 \\
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5
\end{array}
$$

よって，二項係数との関係から，次が成り立つ．

$$ \sum_{r=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{r} = 2^n. $$

証明．$n \geq 0$ に対して，パスカルの三角形における，$n+1$ 行目の全ての数の和を S_n とおくと，数列 $\{S_n\}$ は，

$$ \text{初項 } S_0 = 1,\ \text{漸化式 } S_{n+1} = 2S_n $$

で構成される数列である．なぜならば，パスカルの三角形の $n+1$ 行目の数は，n 行目の数の和で構成されているが，この構成に n 行目の数は，それぞれ 2 回使われているからである．（両端の数についても 2 回使われていると見ることができる．）よって，$n+1$ 行目の数の和 S_n は，

$$ S_n = 2S_{n-1} = 2 \cdot 2S_{n-2} = \cdots = 2^n S_0 = 2^n $$

と計算できるので，前半の主張が従う．後半の主張に関しては，上で証明したパスカルの三角形と二項係数の関係から明らかである．□

注意． 上では，パスカルの三角形の構成方法に着目して前半の主張から後半の証明したが，後半の主張を直接証明することもできる．それは，二項係数 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$ が，二項係数と呼ばれる所以である公式

$$ (a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{r} a^r b^{n-r} $$

に $a = b = 1$ を代入すれば明らかである．よって，これから前半の主張が従うこともわかる．

[1] 逆に上の結果から，組合せの公式 (1) が証明できたことになると言った方がパスカルの三角形の凄みが伝わるかもしれない．