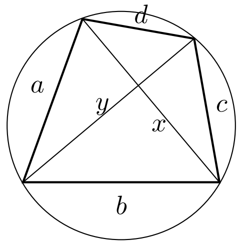
トレミーの定理

定理. 円に内接する四角形において，
向かい合う辺の長さの積の和は，対角線の長さの積に等しい．



$$ac + bd = xy$$

証明．（三角形の相似を用いる方法）
下図のような，円に内接する四角形 ABCD に対して，対角線 BD 上に $\angle\mathrm{BAE} = \angle\mathrm{CAD}$ となるように点 E をとる．まず，次が成り立つことを示す．

(i) △ ABE と，△ ACD は相似　　,　　(ii) △ ACB と，△ ADE は相似．

(i) 円周角の定理から，弧 AD に対する円周角は等しいので，$\angle\mathrm{ABE} = \angle\mathrm{ACD}$ が成り立つ．また，仮定より，$\angle\mathrm{BAE} = \angle\mathrm{CAD}$ が成り立つ．よって，△ABE と △ACD は，２角がそれぞれ等しいから相似である．

(ii) 円周角の定理から，弧 AB に対する円周角は等しいので，$\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ADE}$ が成り立つ．また，仮定より，$\angle\mathrm{BAE} = \angle\mathrm{CAD}$ が成り立っているので，

$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BAE} + \angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{CAD} + \angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{EAD}$$

が成り立つ．よって，△ACB と △ADE は，２角がそれぞれ等しいから相似である．

線分 AB, BC, CD, DA の長さをそれぞれ，a, b, c, d とおき，対角線 AC, BD の長さをそれぞれ，x, y とおく．

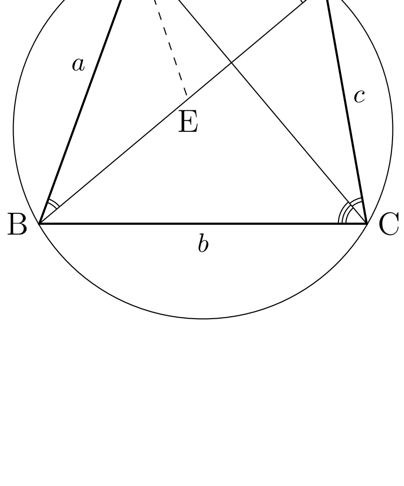
(i) より，$a : \mathrm{BE} = x : c$ が成り立つので，$ac = x \cdot \mathrm{BE}$ を得る．$\cdots$ (iii)

(ii) より，$x : b = d : \mathrm{DE}$ が成り立つので，$bd = x \cdot \mathrm{DE}$ を得る．$\cdots$ (iv)

(iii), (iv) の両辺を足すと，

$$ac + bd = x \cdot \mathrm{BE} + x \cdot \mathrm{DE} = x \cdot \mathrm{BE} + \mathrm{DE} = xy$$

が成り立ち結果がしたがう．



□

証明.（余弦定理を用いる方法）
下図のような，円に内接する四角形 ABCD に対して，線分 AB, BC, CD, DA の長さをそれぞれ，a, b, c, d とおき，対角線 AC, BD の長さをそれぞれ，x, y とおく．また，$\angle \mathrm{BAD} = \theta, \angle \mathrm{ABC} = \varphi$ とおく．

　$\triangle$BAD に対して，余弦定理を用いることで，等式

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \tag{1}$$

を得る．また，$\triangle$BCD に対して，余弦定理を用いることで，等式

$$\begin{aligned} x^2 &= c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^\circ - \theta) \\ &= c^2 + d^2 + 2cd\cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

を得る．$cd \times (1) + ab \times (2)$ より，等式

$$\begin{aligned} (cd+ab)x^2 &= cd(a^2+b^2) + ab(c^2+d^2) \\ &= cda^2 + ab(c^2+d^2) + cdb^2 \\ &= (ca+db)(da+cb) \\ &= \frac{(ca+db)(da+cb)}{cd+ab} \end{aligned} \tag{3}$$

を得る．同様にして，$\triangle$ABC と $\triangle$ADC にそれぞれ余弦定理を用いることで，２つの等式

$$y^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi, \tag{4}$$

$$y^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\varphi \tag{5}$$

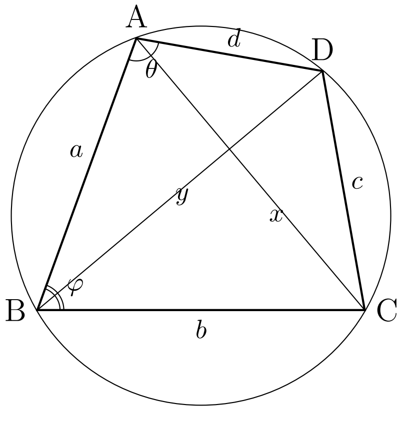
を得る．$bc \times (4) + ad \times (5)$ より，等式

$$\begin{aligned} (bc+ad)y^2 &= (ba+cd)(ca+bd) \\ y^2 &= \frac{(ba+cd)(ca+bd)}{bc+ad} \end{aligned} \tag{6}$$

を得る．$(3) \times (6)$ により，

$$x^2y^2 = \frac{(ca+db)\cancel{(da+cb)}}{\cancel{cd+ab}} \cdot \frac{\cancel{(ba+cd)}(ca+bd)}{\cancel{bc+ad}} = (ca+db)^2$$

を得るが，$xy > 0$，$ca + db > 0$ なので，$xy = ac + bd$ がしたがう．



□