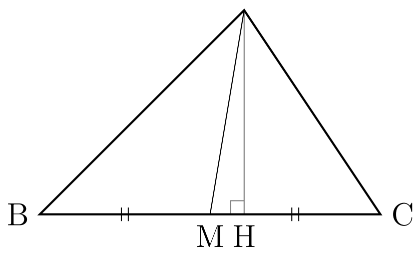
中線定理とスチュワートの定理

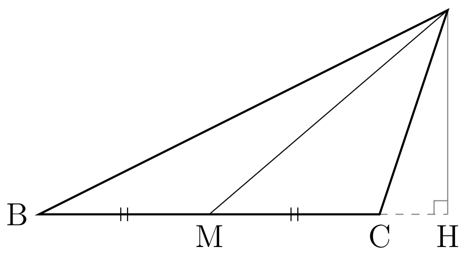
中線定理

定理. $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，辺 BC の中点を M とするとき，次が成り立つ．

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

証明. $\mathrm{AB} > \mathrm{AC}$ を仮定する．次のように，$\angle\mathrm{C}$ が鋭角の場合と，鈍角の場合を考える．





ここで，点 H は，A から直線 BC に下ろした垂線である．どちらの場合も三平方の定理を繰り返し用いて，次のように証明できる．直角三角形 ABH に三平方の定理を適用して，

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2$$

が成り立つ．さらに，$\mathrm{BH} = \mathrm{BM} + \mathrm{MH}$ から，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{AH}^2 + (\mathrm{BM} + \mathrm{MH})^2 \\ &= \mathrm{AH}^2 + \mathrm{BM}^2 + \mathrm{MH}^2 + 2 \cdot \mathrm{BM} \cdot \mathrm{MH} \qquad (1)\end{aligned}$$

が成り立つ．同様に，$\triangle\mathrm{ACH}$ が直角三角形であることと $\mathrm{CH} = |\mathrm{CM} - \mathrm{MH}|$ であることから[1]，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AH}^2 + \mathrm{CH}^2 \\ &= \mathrm{AH}^2 + |\mathrm{CM} + \mathrm{MH}|^2 \\ &= \mathrm{AH}^2 + \mathrm{CM}^2 + \mathrm{MH}^2 - 2 \cdot \mathrm{CM} \cdot \mathrm{MH} \qquad (2)\end{aligned}$$

が成り立つ．点 M は辺 BC なので，$\mathrm{BM} = \mathrm{CM}$ に注意して，(1) 式と，(2) 式の両辺をそれぞれ足すことにより，等式

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AH}^2 + \mathrm{BM}^2 + \mathrm{MH}^2) \qquad (3)$$

を得る．さらに，直角三角形 AMH に三平方の定理を適用することで，

$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{MH}^2$$

が得られるので，これと (3) 式を表せて，結果の式を得る．

$\mathrm{AB} < \mathrm{AC}$ の場合は，上の証明における B と C の役割を入れ替えるだけで同様に証明できる．また，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ の場合は，求める等式が，$2\mathrm{AB}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$ となるが，このときは，$\mathrm{M} = \mathrm{H}$ であって，$\triangle\mathrm{ABM}$ が直角三角形であることから明らかである． □

注意. 中線定理の結果の式は，次のように，B と C に関して対称的な形で書くこともできる．

$$(\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BM}^2) + (\mathrm{AC}^2 - \mathrm{CM}^2) = 2\mathrm{AM}^2$$

ただし，$\mathrm{BM} = \mathrm{CM}$ である．

[1] $\angle\mathrm{C}$ が鋭角の場合と，鈍角の場合を合わせて記述するために絶対値を用いている．

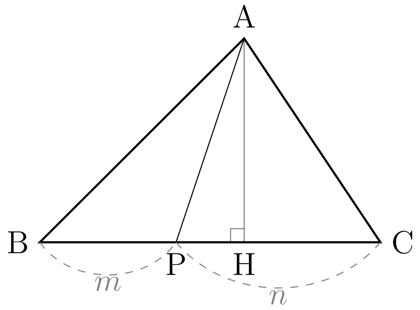
中線定理は，$\triangle$ABC に対して，辺 BC を $1:1$ に内分する点を M としたときの定理であったが，内分の比率を一般に $m:n$ としても同じような結果が成り立つというのが，スチュワートの定理である．スチュワートの定理の結果の式については，多くの表し方があるが，ここでは中線定理の注意で紹介した形と対応させて定理を述べる．

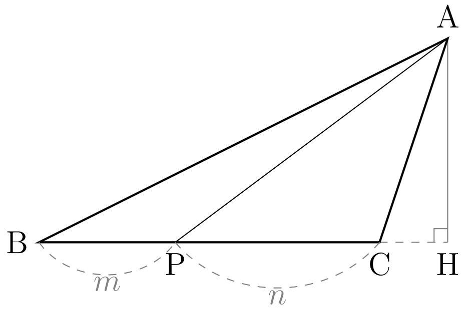
スチュワートの定理

定理． $\triangle$ABC に対して，辺 BC を $m:n$ に内分する点を P とするとき，次が成り立つ．

$$n(\mathrm{AB}^2-\mathrm{BP}^2)+m(\mathrm{AC}^2-\mathrm{CP}^2)=(m+n)\mathrm{AP}^2$$

証明．点 A から直線 BC に下ろした垂線の足を H とする．$\angle$B は鋭角で，BP $<$ BH を仮定する．





中線定理の証明と同様にして，次の 2 つの等式を得る．

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{PH}^2+2\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{PH} \tag{4}$$

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{CP}^2+\mathrm{PH}^2-2\cdot\mathrm{CP}\cdot\mathrm{PH} \tag{5}$$

ここで，BP : CP $=m:n$ より，nBP $=m$CP が成り立つので，(4)$\times n$+(5)$\times m$ を考えると，

$$n\mathrm{AB}^2+m\mathrm{AC}^2=(m+n)(\mathrm{AH}^2+\mathrm{PH}^2)+n\mathrm{BP}^2+m\mathrm{CP}^2 \tag{6}$$

が成り立つ．この式に $\mathrm{AP}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{PH}^2$ を代入し，変形することで，結果の式を得る．

$\angle$B は鋭角で BP $>$ BH となる場合や，$\angle$B が鈍角の場合は，CP $<$ CH となるので，上の証明における B と C の役割を入れ替えるだけで同様に証明できる．また，BP $=$ BH すなわち，P $=$ H の場合は，$\triangle$ABP，$\triangle$ACP が直角三角形となるので明らかである．　□

次に，スチュワートの定理の系として，外分点に関する結果を紹介しよう．

スチュワートの定理の系

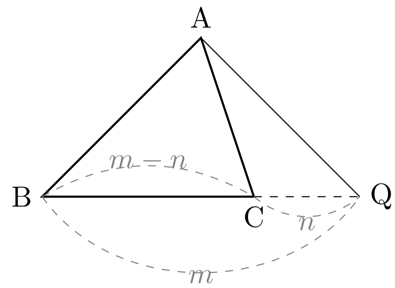
系． $\triangle$ABC に対して，辺 BC を $m:n$ に外分する点を Q とするとき，次が成り立つ．

$$-n(\mathrm{AB}^2-\mathrm{BQ}^2)+m(\mathrm{AC}^2-\mathrm{CQ}^2)=(m-n)\mathrm{AQ}^2$$

証明．どちらも同じなので，$m>n$ の場合だけ証明する．右図のように，点 C を，辺 BQ を，$m-n:n$ に内分する点とみて，三角形 ABQ に対してスチュワートの定理を適用することで，等式

$$n(\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2)+(m-n)(\mathrm{AQ}^2-\mathrm{QC}^2)=m\mathrm{AC}^2$$

$$-n\mathrm{AB}^2+m\mathrm{AC}^2+n\mathrm{BC}^2+(m-n)\mathrm{QC}^2=(m-n)\mathrm{AQ}^2$$



を得る．ここで，$\mathrm{BC}=\dfrac{m-n}{m}\mathrm{BQ}$ と，$\mathrm{QC}=\dfrac{n}{m}\mathrm{BQ}$ に注意すると，

$$n\mathrm{BC}^2+(m-n)\mathrm{QC}^2=n\mathrm{BQ}^2-m\mathrm{CQ}^2$$

と計算できる．これを上の等式に代入すれば結果の式が得られる．　□