タルタリアとカルダノ　３次方程式の解法をめぐって

16 世紀のイタリアでは，数学の問題を解き合うという数学の試合が行われており，勝利者には，栄誉と賞金が与えられるというものでした．従って，当時のイタリアでは新しく発見された数学の解法は秘密にされることが多かったのです．

1535 年に行われた 3 次方程式の解法に関する数学の試合において，タルタリア（Niccolo Tartaglia）[1] という数学者が完全勝利を収めました．その噂を聞きつけたカルダノという数学者が，３次方程式の解法教えてほしいとタルタリアに懇願しました．最初のうちは拒否をしていたタルタリアでしたが，カルダノの絶対に公表しないという約束を信じ，その解法を伝授したのでした．これが 1539 年頃のことと言われています．

しかし，カルダノは 1545 年に自身の数学書「大なる術」において，３次方程式の解法を公表してしまうのでした．これにタルタリアは激怒し，カルダノに数学の試合を申し込みましたが，その試合にカルダノは参加せず，代わりに弟子のフェラリ（Ludovico Ferrari）が参加したのでした．フェラリ自身も 4 次方程式の解法[2] を発見するほどの天才数学者でしたので，タルタリアはフェラリに敗れてしまうのでした．

タルタリアからカルダノに伝えられた次の問題を考察しよう．

> 立方体と辺の 6 倍との和を 20 に等しくせよ．

立方体の 1 辺の長さを x とおくと，上の問題は，

$$x^3 + 6x = 20 \tag{1}$$

という 3 次方程式に相当します．解法は，次の通りです：
$uv = \dfrac{1}{3} \times 6 = 2$ となるような u, v を用いて，$x = u - v$ とおく．これを方程式 (1) に代入すると

$$(u-v)^3 + 6(u-v) = 20$$

となり，左辺は，

$$u^3 - v^3 - 3uv(u-v) + 6(u-v) = u^3 - v^3$$

と計算できるので，方程式 (1) は，

$$u^3 - v^3 = 20 \tag{2}$$

となる．さらに，$uv = 2$ を $v = \dfrac{2}{u}$ と変形し，これを方程式 (2) に代入して，両辺に u^3 を掛けることで，

$$u^6 - 20u^3 - 8 = 0$$

を得る．これは u^3 の 2 次方程式なので，これを解いて，

$$u^3 = 10 + \sqrt{108}$$

を得る[3]．また，(2) 式から，（もしくは同様にして，）

$$v^3 = -10 + \sqrt{108}$$

を得る．以上から，

$$x = u - v = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

が求める解である．

---

[1]タルタリアは通称であって，本名はニコロ・フォンタナ（Niccolo Fontana）

[2]これもカルダノの「大なる術」に載っている．

[3]負の解 $u^3 = 10 - \sqrt{108}$ は，考えられていなかったようです．

上の具体例で見た解法は，正の数 p, q に対しての3次方程式 $x^3+px=q$ の実数解を見つけたことに相当するが，後にカルダノは，$x^3+ax+bx+c$ の一般の形[4] の3次方程式の解法に成功した．その解法を次で見てみよう：

3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ を考える．

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

とおく．$x=y-\dfrac{a}{3}$ という変換により得られる y の3次式を $g(y)$ とすると，

$$g(y)=f\left(y-\frac{a}{3}\right)=y^3+\left(-\frac{a^2}{3}+b\right)y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)$$

と計算でき，2次の項がない3次式が得られる．簡単のため，

$$p=-\frac{a^2}{3}+b, \qquad q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$$

とおくと，3次式

$$g(y)=y^3+py+q$$

を得る．さらに $y=u+v\neq 0$ とおくと，

$$g(u+v)=u^3+v^3+q+(u+v)(3uv+p)$$

と計算できる．ここで，$g(u+v)=0$ となる組 (u,v) の十分条件として，次の条件 (3) を考える．

$$u^3+v^3=-q, \qquad uv=-\frac{p}{3} \tag{3}$$

条件 (3) の2つの目の式の両辺を3乗すると，$u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$ を得るが，これと $u^3+v^3=-q$ と，解と係数の関係から，u^3 と v^3 は，2次方程式 $t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$ の解であることがわかる．よって，2次方程式の解の公式を用いて，

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}, \qquad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{4}$$

を得る．(4) を満たし，$uv=-\frac{p}{3}$ を満たす組 (u,v) は3つ存在して，それらは，i を虚数単位として，$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を1の3乗根のうちの1つ，u_0, v_0 を (4) の実数解，すなわち

$$u_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \qquad v_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

とするとき，

$$(u,v)=(u_0,v_0),\ (\omega u_0,\omega^2 v_0),\ (\omega^2 u_0,\omega v_0)$$

と書ける．$x=y-\frac{a}{3}$，$y=u+v$ とおいていたので，

$$x=u_0+v_0-\frac{a}{3}, \quad \omega u_0+\omega^2 v_0-\frac{a}{3}, \quad \omega^2 u_0+\omega v_0-\frac{a}{3}$$

が，求める3次方程式 $f(x)=0$ の解である[a]．

[a]条件条件 (3) は，解となるための十分条件であったが，代数学の基本定理より3次方程式の解は3つなので，この他に解は存在しないことがわかる．

このように3次方程式の解法を完全に一般化したのはカルダノであるが，その主要部分のアイデアはタルタリアによるものである．現在では，この3次方程式の解法は，カルダノの解法と呼ばれることが多いが，タルタリアに敬意を表して，タルタリア・カルダノの解法と言われることもある．

[4]任意の3次方程式は，x^3 の項の係数で両辺を割ることで，$x^3+ax^2+bx+c=0$ の形にできる．