ヴァンデルモンド行列とその逆行列

定義. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を含む n 次正方行列

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

を（n 次）ヴァンデルモンド行列という．

ヴァンデルモンド行列 V の行列式 $\det V$ は，差積

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

なので[1]，$x_1, \cdots, x_n$ が相異なるとき，$\det V \neq 0$ であり，V は，逆行列を持つ．この逆行列を記述するために，記号を用意する．$i = 1, \cdots, n$ に対して，x の関数 $\ell_i(x)$ を，

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

で定める[2] と，$\ell_i(x)$ は，$n-1$ 次関数であり，$j = 1, 2, \cdots, n$ に対して，

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & (j = i) \\ 0 & (j \neq i) \end{cases} \tag{1}$$

が成り立つ．$\ell_i(x)$ の展開式における j 次の項の係数を $v_{i,j}$ とおき，定数項を $v_{i,0}$ とおく．これにより，$\ell_i(x)$ は，

$$\ell_i(x) = v_{i,0} + v_{i,1}x + v_{i,2}x^2 + \cdots + v_{i,n-1}x^{n-1}$$

と表せる．

命題. $x_1, \cdots, x_n$ が相異なるとする．このとき，ヴァンデルモンド行列 V の逆行列は，

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} v_{1,0} & v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n-1} \\ v_{2,0} & v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,n-1} \\ v_{3,0} & v_{3,1} & v_{3,2} & \cdots & v_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,0} & v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

と表せる．

証明. 積 $V^{-1}V$ の i 行 j 列は，

$$\begin{pmatrix} v_{i,0} & v_{i,1} & v_{i,2} & \cdots & v_{i,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_j \\ x_j^2 \\ \vdots \\ x_j^{n-1} \end{pmatrix} = \ell_i(x_j)$$

である．よって，(1) から，$V^{-1}V$ は単位行列である．□

---

[1] https://gleamath.com/vandermonde-determinant/

[2] ラグランジュ基底多項式と呼ばれる．https://gleamath.com/lagrange-interpolation/