米田の補題

C を圏[1]とする．C の対象 A, B に対して，A から B への射 $A \to B$ 全体の集合を $\mathrm{Hom}_C(A, B)$ で表す．圏 C の逆転圏を C^{op} で表す．集合全体のなす圏を $\mathbf{Set}$ で表す．

定義. C を圏とする．

- 反変関手 $C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を C **上の前層**という．
- C 上の前層全体のなす圏[2]を $C^\wedge$ で表す．

米田の補題の主張に現れる特別な前層を定義する．

命題. C を圏とし，A を C の対象とする．

- C の対象 X に対し，$h_A(X) = \mathrm{Hom}_C(X, A)$ とおき，C の射 $f : X \to Y$ に対し，
$$h_A(f) : \mathrm{Hom}_C(Y, A) \to \mathrm{Hom}_C(X, A)\ ;\ g \mapsto g \circ f$$
とおく．このとき，反変関手 $h_A : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が定まる．
- C の対象 X に対し，$h^A(X) = \mathrm{Hom}_C(A, X)$ とおき，C の射 $f : X \to Y$ に対し，
$$h^A(f) : \mathrm{Hom}_C(A, X) \to \mathrm{Hom}_C(A, Y)\ ;\ g \mapsto f \circ g$$
とおく．このとき，共変関手 $h^A : C \to \mathbf{Set}$ が定まる．

証明. 斎藤毅 数学原論 命題 1.5.2 または，表現される関手（Hom 関手）[3]を参照. □

定義. C を圏，A を C の対象とする．上の命題で定まる C 上の前層 $h_A : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ と，C^{op} 上の前層 $h^A : C \to \mathbf{Set}$ を，A **によって表現される関手**という．[4]

命題 (米田の補題). C を圏とし，A を C の対象とする．

- F を C 上の前層とする．$a \in F(A)$ と，C の対象 X に対して，写像
$$a_X : h_A(X) = \mathrm{Hom}_C(X, A) \to F(X)\ ;\ f \mapsto F(f)(a)$$
は，C 上の前層の射 $\varphi_a \in \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(h_A, F)$ を定める．さらに，写像
$$F(A) \to \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(h_A, F)\ ;\ a \mapsto \varphi_a$$
は可逆である．逆写像は，$\varphi(A)(1_A) \leftarrow\!\shortmid \varphi$ である．（$1_A : A \to A$ は単位射）
- F を C^{op} 上の前層とする．$a \in F(A)$ と，C の対象 X に対して，写像
$$a_X : h^A(X) = \mathrm{Hom}_C(A, X) \to F(X)\ ;\ f \mapsto F(f)(a)$$
は，C^{op} 上の前層の射 $\varphi^a \in \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}\wedge}}(h^A, F)$ を定める．さらに，写像
$$F(A) \to \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}\wedge}}(h^A, F)\ ;\ a \mapsto \varphi^a$$
は可逆である．逆写像は，$\varphi(A)(1_A) \leftarrow\!\shortmid \varphi$ である．

[1]局所的に小さい圏すなわち，C の対象 A, B に対して，$\mathrm{Hom}_C(A, B)$ が集合となる圏
[2]$C^\wedge$ の対象は関手 $C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ であり，射は関手の射（自然変換）である．
[3]https://gleamath.com/hom-functor01
[4]C の逆転圏 C^{op} の逆転圏 $(C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ は，C である．

証明．１つ目の主張（反変関手に関するもの）の証明は，斎藤毅 数学原論 命題 1.5.4 を参照．２つ目の主張（共変関手に関するもの）を証明する．まずは，$a \in F(A)$ と，C の対象 X に対して定まる写像 $a_X : h^A(X) \to F(X)$ が，C^{op} 上の前層の射 $\varphi^a : h^A \to F$ を定めることを示す．そのためには，C の対象 Y と，$g \in \mathrm{Hom}_C(X,Y)$ に対して，図式

$$\begin{array}{ccc} h^A(X) = \mathrm{Hom}_C(A,X) & \xrightarrow{h^A(g)} & \mathrm{Hom}_C(A,Y) = h^A(Y) \\ {\scriptstyle a_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle a_Y} \\ F(X) & \xrightarrow{F(g)} & F(Y) \end{array} \tag{1}$$

が可換であることを示せば良い．右回り，左回りの $f \in \mathrm{Hom}_C(A,X)$ の像はそれぞれ，

$$\begin{aligned} a_Y \circ h^A(g)(f) &= a_Y(g \circ f) = F(g \circ f)(a), \\ F(g) \circ a_X(f) &= F(g) \circ F(f)(a) \end{aligned}$$

と計算でき，関手 F の共変性から，

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \tag{2}$$

が成り立つので，図式 (1) は可換である．

次に，写像 $F(A) \to \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}\wedge}}(h^A, F)$ が可逆であることを示す．$a \in F(A)$ は，合成写像で，

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \to & \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}\wedge}}(h^A, F) & \to & F(A) \\ a & \mapsto & \varphi^a & \mapsto & \varphi^a(A)(1_A) \end{array}$$

と写る．ここで，$\varphi^a(A) = a_A : h^A(A) = \mathrm{Hom}_C(A,A) \to F(A)$ に注意すると，

$$\varphi^a(A)(1_A) = a_A(1_A) = F(1_A)(a) = 1_{F(A)}(a) = a$$

が成り立つ[5]ので，上の合成写像は恒等写像である．もう一方の合成写像も恒等写像であることを示す．$\varphi \in \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}\wedge}}(h^A, F)$ に対して，$b = \varphi(A)(1_A)$ とおくと，φ は，合成写像で，

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}\wedge}}(h^A, F) & \to & F(A) & \to & \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}\wedge}}(h^A, F) \\ \varphi & \mapsto & \varphi(A)(1_A) = b & \mapsto & \varphi^b \end{array}$$

と写る．C の対象 Z と，$h \in \mathrm{Hom}_C(A,Z)$ に対して，$\varphi(Z)(h) = \varphi^b(Z)(h)$ であることを示せば良い．これらはそれぞれ，

$$\begin{aligned} \varphi(Z)(h) &= \varphi(Z)(h \circ 1_A) = \varphi(Z) \circ h^A(h)(1_A), \\ \varphi^b(Z)(h) &= b_X(h) = F(h)(b) = F(h)(\varphi(A)(1_A)) = F(h) \circ \varphi(A)(1_A) \end{aligned}$$

と計算できるが，図式

$$\begin{array}{ccc} h^A(A) = \mathrm{Hom}_C(A,A) & \xrightarrow{h^A(h)} & \mathrm{Hom}_C(A,Z) = h^A(Z) \\ {\scriptstyle \varphi(A)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi(Z)} \\ F(A) & \xrightarrow{F(h)} & F(Z) \end{array} \tag{3}$$

が可換であることから[6]，$\varphi = \varphi^b$ が従う．よって，$F(A) \to \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}\wedge}}(h^A, F)$ は可逆である．□

[5]関手の性質 $F(1_A) = 1_{F(A)}$ を用いた．

[6]図式 (1) において，$X = A$, $Y = Z$, $g = h$ とすれば良い．