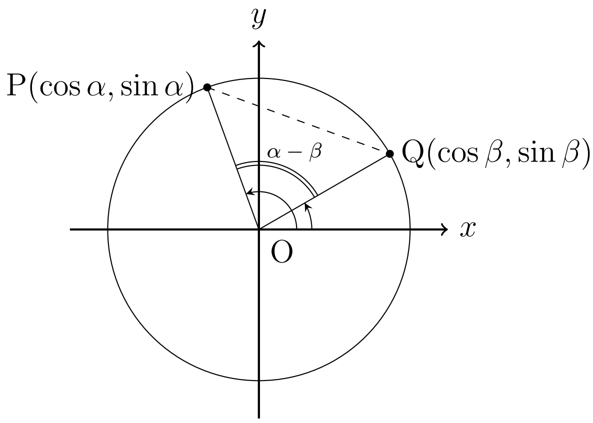
加法定理と三角関数の合成

まず，三角関数の重要な公式である加法定理を証明する．

加法定理

- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

証明．まず，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ を証明する．
単位円上に 2 点 $\mathrm{P}(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\mathrm{Q}(\cos\beta,\sin\beta)$ をとる．$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=1$ に注意して，$\triangle\mathrm{OPQ}$ に対して，余弦定理を適用すると，



$$
\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2 &= \mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos(\alpha-\beta)\\
&= 2-2\cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．一方, 平面上の 2 点の距離の公式から,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\
&= \cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta\\
&\qquad -2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta\\
&= 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．以上より，等式

$$
\begin{aligned}
2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) &= 2-2\cos(\alpha-\beta)\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (1)
\end{aligned}
$$

が従う．また，(1) 式において，β を $-\beta$ に置き換えることで，次の等式を得る．

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha-(-\beta)) &= \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (2)
\end{aligned}
$$

さらに，(1) 式において，α を $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ に置き換えることで，等式

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (3)
\end{aligned}
$$

が従う．また，(3) 式において，β を $-\beta$ に置き換えることで，次の等式を得る．

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\
&= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (4)
\end{aligned}
$$

次に，(2) 式，(3) 式を用いると，

$$
\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}
$$

が成り立つ．ここで，分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ることにより，等式

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \tag{5}$$

が従う．また，(5) 式において，β を $-\beta$ に置き換えることで，次の等式を得る．

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)} = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \tag{6}$$

□

次に，三角関数の合成と呼ばれる次のような計算ができることを紹介する．

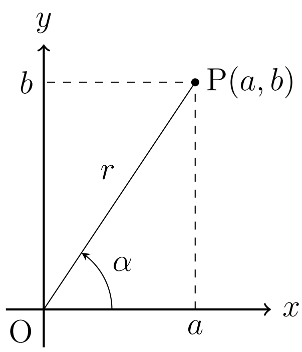
三角関数の合成

三角関数を含む式 $a\sin\theta+b\cos\theta$ は次のように変形できる．

$$a\sin\theta+b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，r，α は次のように定まる値とする：
平面上に点 $\mathrm{P}(a,b)$ をとる．直線 OP の動径が定める角を α とし，OP の長さを r とする．すなわち，a, b に対して，次が成り立つ．

$$r=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\alpha=\frac{a}{r}, \quad \sin\alpha=\frac{b}{r}$$



注意. 上で動径が定める角を α とすると述べたが，正確には，動径に対して一般角はひとつに定まらない．しかし，2π（一周）の整数倍を除けばひとつに定まるので，α に対する三角比の値はひとつに決まる．通常，α は，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ または，$0\leqq\alpha<2\pi$ の範囲で考えることが多い．

証明. 線分 OP 上に，$\mathrm{OP'}=1$ となるように，点 $\mathrm{P'}$ をとる．
点 $\mathrm{P'}$ は，単位円上の点なので，その座標は，

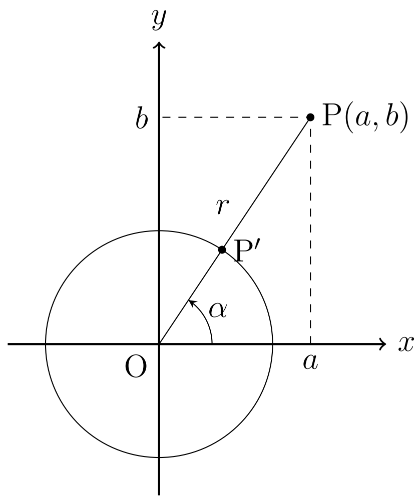
$$\mathrm{P'}(\cos\alpha,\sin\alpha)$$

と書ける．一方，$\mathrm{OP}:\mathrm{OP'}=r:1$ が成り立つので，

$$\cos\alpha=\frac{a}{r}, \quad \sin\alpha=\frac{b}{r}$$

である．以上から，加法定理を用いることで，

$$\begin{aligned} a\sin\theta+b\sin\theta &= r\left(\frac{a}{r}\sin\theta+\frac{b}{r}\sin\theta\right) \\ &= r(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta) \\ &= r\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}$$



が成り立つ．

□

補足. 同様に，点 $\mathrm{Q}(b,a)$ を考え，OQ が定める動径を $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ とすると，次のようにも書ける．

$$a\sin\theta+b\cos\theta = r\cos(\theta-\beta), \qquad r=\sqrt{a^2+b^2}$$