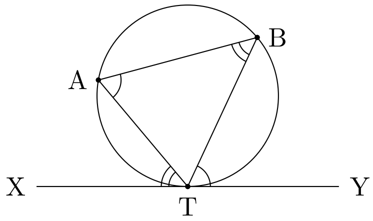
接弦定理とその逆

接弦定理

直線 XY が，点 T で円と接しているとする．2 点 A，B を円周上の点とすると，次が成り立つ．

$$\angle \mathrm{BTY} = \angle \mathrm{TAB}$$

$$\angle \mathrm{ATX} = \angle \mathrm{TBA}$$

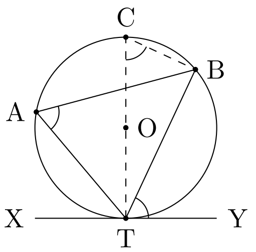


証明. $\angle \mathrm{BTY} = \angle \mathrm{TAB}$ が成り立てば，

$$\angle \mathrm{ATX} = 180^\circ - \angle \mathrm{BTY} - \angle \mathrm{ATB} = 180^\circ - \angle \mathrm{TAB} - \angle \mathrm{ATB} = \angle \mathrm{TBA}$$

が成り立つので，$\angle \mathrm{BTY} = \angle \mathrm{TAB}$ のみ証明する．

(i)
$\angle \mathrm{BTY}$ が鋭角の時，



図のように，直線 TO と円の交点のうち，点 T でない方を C とする．直線 XY は，円の接線なので $\angle \mathrm{CTY} = 90^\circ$ である．よって，

$$\angle \mathrm{BTY} = 90^\circ - \angle \mathrm{BTC} \qquad (1)$$

が成り立つ．また，線分 TC は円の直径なので，円周角の定理から，$\angle \mathrm{TBC} = 90^\circ$ である．よって，

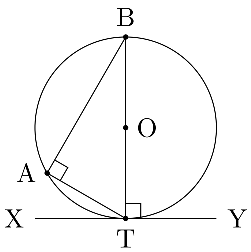
$$\angle \mathrm{TCB} = 90^\circ - \angle \mathrm{BTC} \qquad (2)$$

が成り立つ．最後に，弧 BT に対する円周角の定理から，

$$\angle \mathrm{TCB} = \angle \mathrm{TAB} \qquad (3)$$

が成り立つ．(1)，(2)，(3) より，主張が従う．

(ii)
$\angle \mathrm{BTY} = 90^\circ$ の時，



直線 XY は，円の接線なので

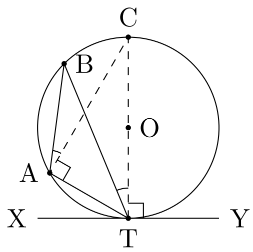
$$\angle \mathrm{BTY} = 90^\circ \qquad (4)$$

が成り立つ．また，線分 TB は円の直径なので，円周角の定理から，

$$\angle \mathrm{TAB} = 90^\circ \qquad (5)$$

が成り立つ．よって，(4)，(5) より，主張が従う．

(iii)
$\angle \mathrm{BTY}$ が鈍角の時，



図のように，直線 TO と円の交点のうち，点 T でない方を C とする．直線 XY は，円の接線なので $\angle \mathrm{CTY} = 90^\circ$ である．よって，

$$\angle \mathrm{BTY} = 90^\circ + \angle \mathrm{BTC} \qquad (6)$$

が成り立つ．また，線分 TC は円の直径なので，円周角の定理から，$\angle \mathrm{TAC} = 90^\circ$ である．よって，

$$\angle \mathrm{TAB} = 90^\circ + \angle \mathrm{BAC} \qquad (7)$$

が成り立つ．最後に，弧 BC に対する円周角の定理から，

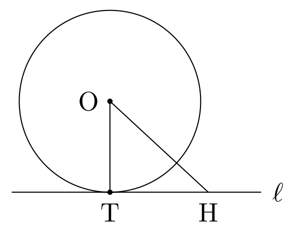
$$\angle \mathrm{BTC} = \angle \mathrm{BAC} \qquad (8)$$

が成り立つ．(6)，(7)，(8) より，主張が従う．

□

注意. 「円の接線は，円の中心と接点を結ぶ線分に対して垂直である」という事実は，接弦定理を用いないで証明されることに注意する：

中心が O である円とある直線 ℓ が，接点 T で接しているとする．接線の定義より，

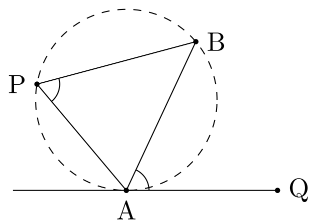


ℓ 上の点 T 以外の点は，全て円の外側にある． $\cdots$（※）

直線 ℓ と線分 OT が垂直でないと仮定する（背理法）．点 O から直線 ℓ に垂線を下ろし，その交点を H とすと，背理法の仮定より，$\mathrm{T} \neq \mathrm{H}$ である．$\triangle\mathrm{OTH}$ は，$\angle\mathrm{H}$ を直角とする直角三角形である．直角三角形の三辺において，直角の対辺の長さが 1 番大きいので，$\mathrm{OT} > \mathrm{OH}$ が成り立つ．これにより，点 H は，円の内部の点となるが，点 H は ℓ 上の点 T と異なる点であるので，（※）に矛盾である．

接弦定理の逆

直線 AB に対して，点 P と点 Q が反対側にあるとする．この時，$\angle\mathrm{BAQ} = \angle\mathrm{APB}$ が成り立つならば，直線 AQ は，$\triangle\mathrm{APB}$ の外接円と接する．



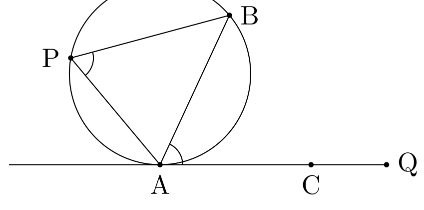
証明. $\triangle\mathrm{APB}$ の外接円の点 A における接線上に点 C をとと，接弦定理より，

$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{APB}$$

が成り立つ．一方，定理の仮定から，$\angle\mathrm{BAQ} = \angle\mathrm{APB}$ が成り立つので，

$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BAQ}$$

が成り立つ．点 Q は，直線 AB に対して，点 P と反対側の点であったので，点 A，C，Q は同一直線上にあることがわかる．直線 AC は，$\triangle\mathrm{APB}$ の外接円の接線であったことから，定理が従う．



□