三角形の角の二等分線

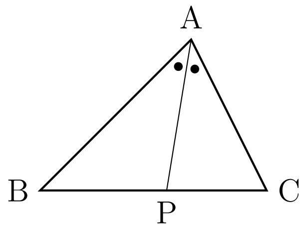
三角形の角の二等分線とそれによって，分けられる対辺の比についての定理を紹介する．

定理． $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と，辺 BC の交点を P とする．

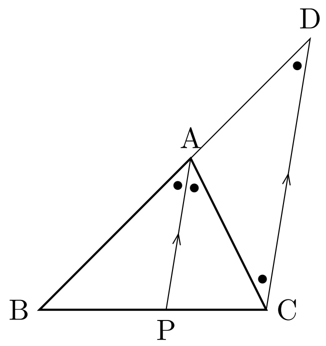
このとき，次が成り立つ．

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BP}:\mathrm{PC}$$

言い換えると，点 P は，辺 BC を AB : AC に内分する点である．



証明．右図のように，点 C を通り，直線 AP と平行な直線と，直線 AB の交点を D とする．
平行線の同位角が等しいことから，$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{ADC}$ が成り立ち，平行線の錯角が等しいことから，$\angle\mathrm{CAP}=\angle\mathrm{ACD}$ が成り立つ．仮定から，直線 AP は，$\angle\mathrm{A}$ の二等分線なので，$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{CAP}$ である．以上を合わせて，



$$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{ACD}$$

を得る．よって，$\triangle\mathrm{ACD}$ は二等辺三角形となり，

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AC}$$

が成り立つ．これと，直線 AP と直線 DC は平行であることから，

$$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{BA}:\mathrm{AD}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$

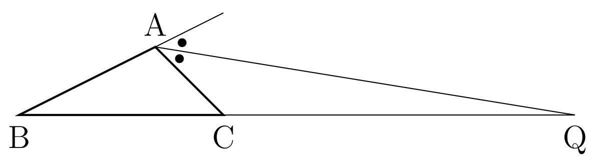
が従う． □

このように，内角の二等分線から，対辺の内分点が得られることがわかった．同様に，外角の二等分線から，対辺の外分点が得られることを証明しよう．

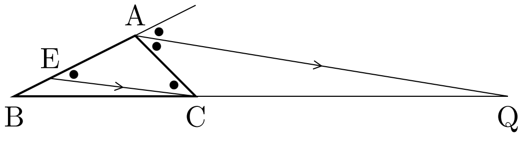
定理． $\mathrm{AB}\neq\mathrm{AC}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，頂点 A の外角の二等分線と，辺 BC を延長した直線の交点を Q とする．このとき，次が成り立つ．

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$$

言い換えると，点 Q は，辺 BC を AB : AC に外分する点である．



証明．右図のように，点 C を通り，直線 AQ と平行な直線と，直線 AB の交点を E とする．
内角の二等分線の場合の証明と同様にして，平行線の同位角や錯角が等しいことを用いると，$\triangle\mathrm{ACE}$ が二等辺三角形となることがわかるので，$\mathrm{AC}=\mathrm{AE}$ が成り立つことが従う．これと，直線 AQ と直線 EC は平行であることから，



$$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\mathrm{BA}:\mathrm{AE}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$

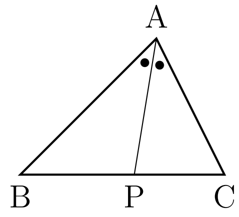
が従う． □

上で紹介した 2 つの定理と，スチュワートの定理[1] を合わせることで，同じ仮定のもとで違う形の結果が得られる．証明方法は同じなので，内分点に関する結果だけ証明する．

定理. $\triangle$ABC に対して，$\angle$A の二等分線と，辺 BC の交点を P とする．このとき，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{BP}\cdot\mathrm{PC}=\mathrm{AP}^2$$

が成り立つ．



証明．$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=m:n$ とおくと，上の定理から，$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=m:n$ が成り立つので，スチュワートの定理から，

$$n(\mathrm{AB}^2-\mathrm{BP}^2)+m(\mathrm{AC}^2-\mathrm{CP}^2)=(m+n)\mathrm{AP}^2 \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，

$$n\mathrm{AB}=m\mathrm{AC},\qquad n\mathrm{BP}=m\mathrm{PC} \tag{2}$$

に注意すると，(1) 式の左辺は，

$$\begin{aligned}
n(\mathrm{AB}^2-\mathrm{BP}^2)+m(\mathrm{AC}^2-\mathrm{CP}^2) &= n(\mathrm{AB}+\mathrm{BP})(\mathrm{AB}-\mathrm{BP})+m(\mathrm{AC}+\mathrm{CP})(\mathrm{AC}-\mathrm{CP})\\
&= (\mathrm{AB}+\mathrm{BP})(n\mathrm{AB}-n\mathrm{BP})+(m\mathrm{AC}+m\mathrm{CP})(\mathrm{AC}-\mathrm{CP})\\
&= (\mathrm{AB}+\mathrm{BP})(m\mathrm{AC}-m\mathrm{PC})+(n\mathrm{AB}+n\mathrm{BP})(\mathrm{AC}-\mathrm{CP})\\
&= m(\mathrm{AB}+\mathrm{BP})(\mathrm{AC}-\mathrm{PC})+n(\mathrm{AB}+\mathrm{BP})(\mathrm{AC}-\mathrm{CP})\\
&= (m+n)(\mathrm{AB}+\mathrm{BP})(\mathrm{AC}-\mathrm{PC})
\end{aligned}$$

と変形できる．これと (1) 式を合わせて，等式

$$(\mathrm{AB}+\mathrm{BP})(\mathrm{AC}-\mathrm{PC})=\mathrm{AP}^2 \tag{3}$$

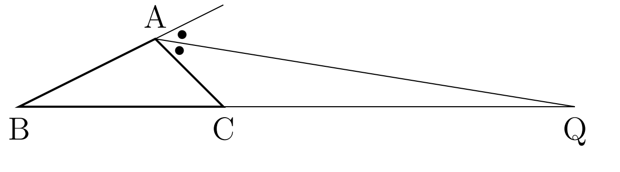
を得る．さらに，(2) の 2 つの等式から，$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PC}=\mathrm{BP}\cdot\mathrm{AC}$ がわかるので，(3) の右辺は，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PC}+\mathrm{BP}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{BP}\cdot\mathrm{PC}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{BP}\cdot\mathrm{PC}$$

と計算できる．よって，結果が従う． □

定理. $\mathrm{AB}\neq\mathrm{AC}$ である $\triangle$ABC に対して，頂点 A の外角の二等分線と，辺 BC を延長した直線の交点を Q とする．このとき，次が成り立つ．

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{QC}=-\mathrm{AQ}^2$$



[1]スチュワートの定理

定理.

- $\triangle$ABC に対して，辺 BC を $m:n$ に内分する点を P とするとき，次が成り立つ．

$$n(\mathrm{AB}^2-\mathrm{BP}^2)+m(\mathrm{AC}^2-\mathrm{CP}^2)=(m+n)\mathrm{AP}^2$$

- $\triangle$ABC に対して，辺 BC を $m:n$ に外分する点を Q とするとき，次が成り立つ．

$$-n(\mathrm{AB}^2-\mathrm{BQ}^2)+m(\mathrm{AC}^2-\mathrm{CQ}^2)=(m-n)\mathrm{AQ}^2$$