不等式の表す領域

座標平面において，$f(x,y)=0$ によって表される図形とは，$f(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) 全体のことであった．また，関数 $y=f(x)$ を満たす点 (x,y) 全体からなる図形を，この関数のグラフと読んでいた．これらはどちらも与えられた等式を満たす点全体を考えており，これによって表される図形は，直線や曲線などの「線」になるのであった[1]．

　ここでは，等式ではなく与えられた不等式を満たす点全体がどのような図形になるのかを考える．このような図形は，一般的には，「線」ではなく「面」になる．

定義. x,y についての不等式を満たす点 (x,y) 全体を，その不等式の表す**領域**という[2]．

　不等式の表す領域について，次が成り立つ．

$y>f(x), y<f(x)$ の表す領域

命題. 関数 $y=f(x)$ は，曲線（または直線）を表すとする．このとき

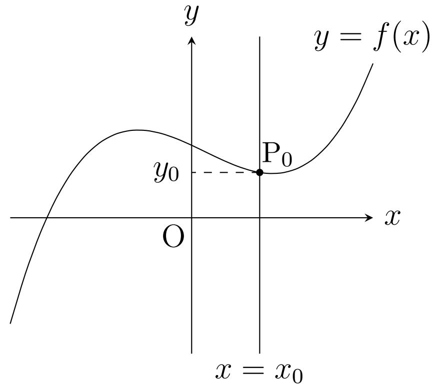
- $y>f(x)$ の表す領域は，曲線（または直線）$y=f(x)$ の上側の部分であり，
- $y<f(x)$ の表す領域は，曲線（または直線）$y=f(x)$ の下側の部分である．

証明. 実数 x_0 に対して，$y_0=f(x_0)$ として，直線 $x=x_0$ を考える．

曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=x_0$ の交点を P_0 とすると，その座標は，$\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ である．直線 $x=x_0$ 上の任意の点 (x_0,y) は，

- $y>y_0$ なら，点 P_0 の上側にあり，
- $y<y_0$ なら，点 P_0 の下側にある．

これはどのような x_0 に対して成り立つので，全ての点に対して，同様に考えれば結果が従う．

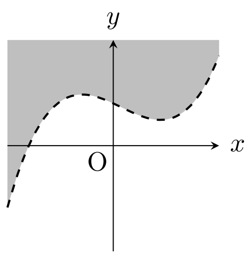


□

注意. 上の命題において，不等号が，$\geq$ や $\leq$ の場合には，領域に曲線 $y=f(x)$ 自体も含まれる．このような場合を，**境界線を含む**という．またそうでは無いときは**境界線を含まない**という．領域を図示する際は，必然的にその境界線を描くことになるので，描いた境界線が，その領域に含まれるかどうかは明記しなければならない．

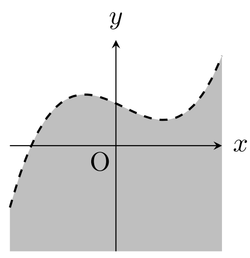
　4 つの場合を下にまとめておこう．全て境界線は $y=f(x)$ であるとする．

$y>f(x)$



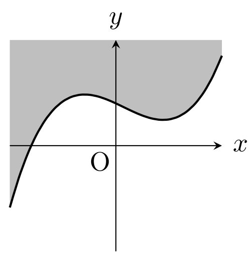
境界線を含まない

$y<f(x)$



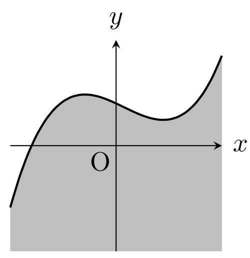
境界線を含まない

$y\geq f(x)$



境界線を含む

$y\leq f(x)$



境界線を含む

[1]正確には，点になることや，点が存在しないということもある．
[2]連結開集合という意味では無い．

次に，x, y の関係式 $f(x, y) = 0$ の形で表される図形のうち，y 軸に平行な直線や円によって分けられる領域について紹介する．

y 軸に平行な直線 $\ell : x = a$ によって分けられる領域は，ℓ の右側か左側である．それぞれについて，次が成り立つ．

直線 $x = a$ によって分けられる領域

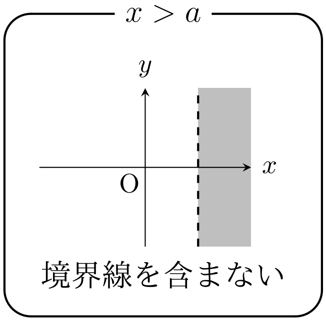
命題． 直線 $\ell : x = a$ に対して，次が成り立つ．

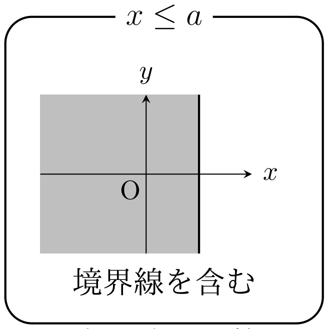
- $x > a$ の表す領域は，直線 ℓ の右側の部分であり，
- $x < a$ の表す領域は，直線 ℓ の左側の部分である．

証明．座標平面上の領域を考えていることに注意する．$x > a$ を満たす点全体の集合は，

$$\{(x, y) \mid x > a\}$$

であり，y の値についての条件が特にない．よって，結果が従う．$x < a$ についても同様である． $\square$





次に，座標平面上の円によって分けられる領域，すなわち，円の内部と外部を表す不等式について解説する．これについては次が成り立つ．

円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ によって分けられる領域

命題． 円 $C : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ に対して，次が成り立つ．

- $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ の表す領域は，円 C の外部であり，
- $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ の表す領域は，円 C の内部である．

証明．円 C の中心を $\mathrm{C}(a, b)$ として，座標平面上の点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$ と C との距離を r_1 とすると，

$$r_1^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2.$$

である．これを用いて，次が成り立つ．

- 点 P_1 が円の外部 $\Longleftrightarrow$ CP_1 が半径より大きい $\Longleftrightarrow r_1 > r \Longleftrightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$,
- 点 P_1 が円の内部 $\Longleftrightarrow$ CP_1 が半径より小さい $\Longleftrightarrow r_1 < r \Longleftrightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$.

任意の点について同様のことが言えるので，結果が従う． $\square$