連立不等式の表す領域

座標平面において，不等式の表す領域とは，与えられた x, y についての不等式を満たす点 (x, y) 全体のことをいうのであった．

ここでは，与えられた連立不等式の表す領域を考察する．連立不等式を満たす点とは，それぞれの不等式を同時に満たす点のことであったので，連立不等式を表す領域とは，それぞれの不等式の表す領域の重なる部分のことである．言い換えると，それぞれの不等式を満たす点全体の集合の共通部分のこととも言える．

例. 次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

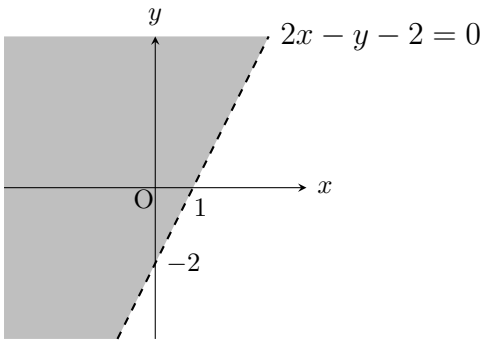
$$\begin{cases} 2x - y - 2 < 0 & \cdots \quad ① \\ x + y - 1 \leq 0 & \cdots \quad ② \end{cases}$$

まずそれぞれの不等式の表す領域を考えよう．

不等式 ① は，

$$y > 2x - 2$$

と変形できるので，この不等式の表す領域は，



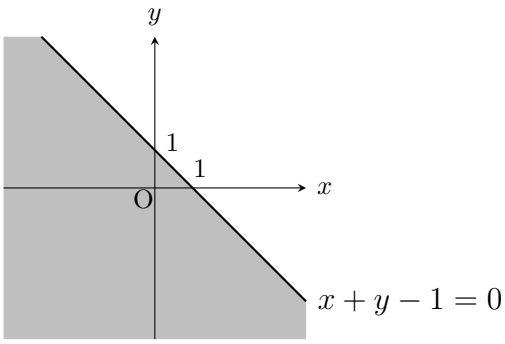
境界線を含まない

となり，

不等式 ② は，

$$y \leq -x + 1$$

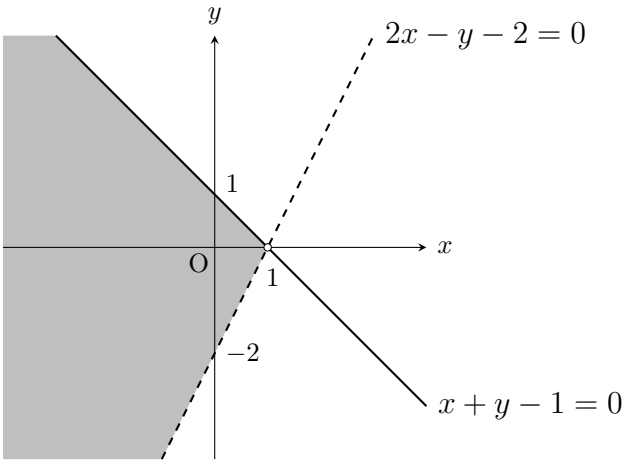
と変形できるので，この不等式の表す領域は，



境界線を含む

となる．

これらの領域の共通部分が，求める連立不等式の表す領域であるから，求める領域は，下図の色付き部分である．ただし，**境界線は，直線 $2x - y - 2 = 0$ は含まず，他は含む．**



注意. 上の例題のように，境界線を含むかどうかの注意書きは，正確に記述すること．また，2 直線の交点 $(1, 0)$ についても，その点を含まないことを意味する白丸「$\circ$」としていることにも注意する．

与えられた不等式が連立不等式の形をしていなくても，連立不等式の考え方を用いて，領域を求めることもある．例えば，

$$F(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y)$$

のように積の形に変形できる（因数分解できる）多項式 $F(x,y)$ に対して，不等式 $F(x,y) > 0$ の表す領域を考える．

$$f(x,y) \cdot g(x,y) > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x,y) > 0 \\ g(x,y) > 0 \end{cases} \cdots ① \quad \text{または，} \begin{cases} f(x,y) < 0 \\ g(x,y) < 0 \end{cases} \cdots ②$$

が成り立つので，求める領域は，連立不等式 ① の表す領域と，連立不等式 ② の表す領域を<u>合わせた部分</u>である．言い換えると，それぞれの不等式を満たす点全体の集合の<u>和集合</u>を求めることになる．

例. 次の不等式の表す領域を図示せよ．

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - x - y > 0$$

まず，$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - x - y = (x+y)(x^2+y^2-1)$ なので，与えられた不等式は，

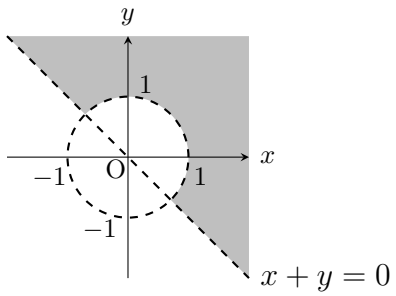
$$(x+y)(x^2+y^2-1) > 0$$

と変形できる．よって，求める領域は，２つの連立不等式

$$\begin{cases} x+y & > & 0 \\ x^2+y^2-1 & > & 0 \end{cases} \cdots ① \quad \text{と，} \begin{cases} x+y & < & 0 \\ x^2+y^2-1 & < & 0 \end{cases} \cdots ②$$

の表す領域の和集合である．

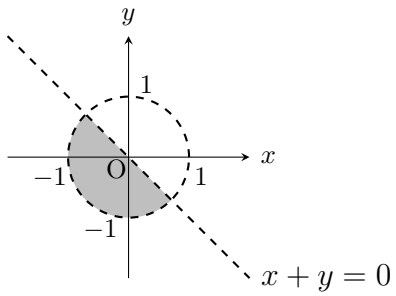
連立不等式 ① の表す領域は，



境界線を含まない

となり，

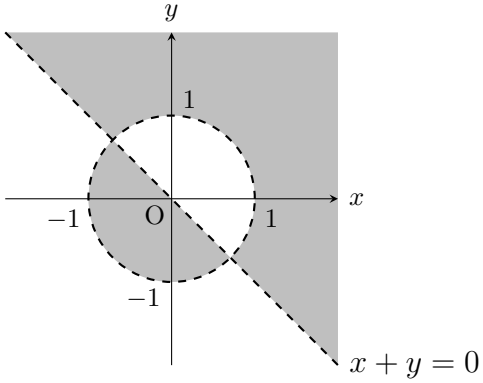
連立不等式 ② の表す領域は，



境界線を含まない

となる．

これらの領域の和集合が，求める不等式の表す領域であるから，求める領域は，下図の色付き部分となる．ただし，**境界線は含まない．**



注意. 求める領域に関して，共通部分や和集合という概念が出てきて混乱するかもしれない．これについては，常に「**不等式の表す領域とは，その不等式を満たす点全体の集合である**」ということを意識しておく必要がある．