放物線で区切られる部分の面積

x^2 の項の係数が互いに逆数である 2 つの放物線で分割される部分の面積について次が成り立つ．

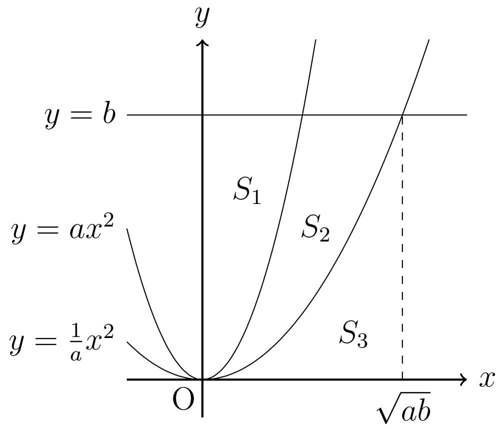
命題． $a>1$，$b>0$ とする．座標平面上において，右図のように，2 つの放物線 $y=ax^2$，$y=\frac{1}{a}x^2$ と，直線 $y=b$ で定まる 3 つの領域の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする．このとき，b の値によらず，

- $S_1+S_2=2S_3$
- $S_1:S_2:S_3=2:2(a-1):a$

が成り立つ．とくに，$a=2$ のときは，

$$S_1=S_2=S_3.$$

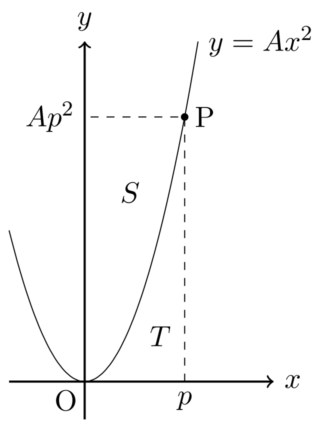
が成り立つ．



命題の証明の前に，次の補題を証明する．

補題． $A>0$ とする．放物線 $y=Ax^2$ 上に点 $\mathrm{P}(p,Ap^2)$ をとる $(p>0)$．点 P から，y 軸，x 軸に下ろした垂線と座標軸，放物線で囲まれる部分の面積を，それぞれ S,T とする．このとき，次が成り立つ．

$$S:T\ =\ 2:1.$$



証明．面積 S,T はそれぞれ

$$S=\int_0^p(Ap^2-Ax^2)\ dx=\frac{2}{3}Ap^3,\quad T=\int_0^p Ax^2\ dx=\frac{1}{3}Ap^3$$

と計算できる．これから結果が従う． □

命題の証明．放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=b$ の交点から x 軸に下ろした垂線と，x 軸，$y=ax^2$ で囲まれる部分の面積を T_1 とし，次の 2 つの長方形 L_1，L_2 を考える：

- L_1：座標軸と $y=b$，$x=\sqrt{ab}$ で囲まれる部分，
- L_2：座標軸と $y=b$，$x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ で囲まれる部分．

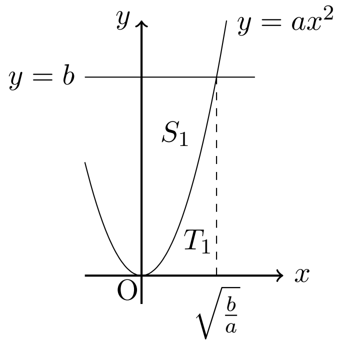
L_1，L_2 の面積比は，底辺の長さを比較することで得られるから，

$$(S_1+S_2+S_3):(S_1+T_1)=\sqrt{ab}:\sqrt{\frac{b}{a}}=a:1$$

が成り立つ．さらに長方形 L_1，L_2 に補題を適用することで，

$$(S_1+S_2):S_3=2:1,\qquad S_1:T_1=2:1$$

が成り立つ．以上から，命題の主張が従う．



□

補足． S_1，S_2，S_3 の面積は，それぞれ，次のように計算できるので，このことからも命題の結果が得られる．

$$S_1=\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}}\left(b-ax^2\right)\ dx=\frac{2\sqrt{b}^3}{3\sqrt{a}},\quad S_2=\int_0^{\sqrt{ab}}\left(b-\frac{1}{a}x^2\right)\ dx-S_1=\frac{2(a-1)\sqrt{b}^3}{3\sqrt{a}},\quad S_3=\int_0^{\sqrt{ab}}\frac{1}{a}x^2\ dx=\frac{a\sqrt{b}^3}{3\sqrt{a}}$$