相加相乗平均

定義. 2 つの正の数 a, b に対して，$\dfrac{a+b}{2}$ を**相加平均**といい，$\sqrt{ab}$ を**相乗平均**という.

相加平均と相乗平均の大小関係については次が知られている.

命題 1. 2 つの正の数 a, b に対して，次が成り立つ.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは，$a = b$ のときである.

証明. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ を示せば良いが，これは，

$$a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

から従う．さらに，

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0 \iff \sqrt{a} = \sqrt{b} \iff a = b$$

から，等号成立条件も従う. □

....

定義. n 個の正の数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して，

$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ を**相加平均**といい，$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ を**相乗平均**という.[1]

上で証明した相加相乗平均の大小関係は次のように一般化できる.

命題 2. $n = 2, 3, \cdots$ とする．n 個の正の数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して，次が成り立つ.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

等号が成り立つのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときである.

証明. 後で証明する補題 1，2 を用いる．任意の正の整数 n に対して，m を十分大きくとることにより，$n \leq 2^m$ が成り立つ．よって，$n = 2^m - k$ として良い．補題 1 より，

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^m}}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdots a_{2^m}}$$

次が成り立つ．さらに，補題 2 を k 回適用することにより，

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^m-k}}{2^m - k} \geq \sqrt[2^m-k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^m-k}}$$

が成り立つが，これが求める不等式である．等号成立条件も補題 2 から従う. □

[1] 実数 A と正の整数 n に対して，n 乗して A になる数を A の n 乗根という．A の n 乗根のうち，実数であるもの（n が偶数のときは 2 つあるがその場合は，そのうち正のもの）を $\sqrt[n]{A}$ で表す．詳しくは指数関数の稿で学ぶ.

補題 1. $m=1,2,\cdots$ とする．$n=2^m$ のとき，命題 2 が成り立つ．

証明. m に関する数学的帰納法で証明する．$m=1$ のときは，命題 1 より従う．$m=k$ のとき補題の主張が成り立つと仮定する．すなわち，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}} \qquad （等号成立は, a_1=a_2=\cdots=a_{2^k}のとき） \tag{1}$$

を仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}}\right) \qquad (2) \\ &\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}\,\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}}} \qquad (3) \\ &= \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^{k+1}}}} \\ &= \sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^{k+1}}}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，(2) の不等号では，仮定 (1) を用いており，(3) の不等号では，命題 1 を用いている．よって，(2) の等号成立条件は，仮定 (1) より，

$$a_1=a_2=\cdots=a_{2^k} \quad かつ \quad a_{2^k+1}=a_{2^k+2}=\cdots=a_{2^{k+1}}$$

であり，(3) の等号成立条件は，

$$\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}=\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}} \quad すなわち \quad a_1a_2\cdots a_{2^k}=a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}$$

である．これらを合わせて，$m=k+1$ のときの等号成立条件 $a_1=a_2=\cdots=a_{2^{k+1}}$ も従う． □

補題 2. $m=2,3,\cdots$ とする．$n=m+1$ のときの命題 2 が成り立つと仮定すると，$n=m$ のときの命題 2 が成り立つ．

証明. $n=m+1$ のときの命題 2 が成り立つと仮定する．すなわち

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}}{m+1} \geq \sqrt[m+1]{a_1a_2\cdots a_{m+1}} \qquad （等号成立は, a_1=a_2=\cdots=a_{m+1}のとき） \tag{4}$$

を仮定する．$b=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}$ とおくと，$b>0$ である．仮定 (4) から，

$$b=\frac{mb+b}{m+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m+b}{m+1} \geq \sqrt[m+1]{a_1a_2\cdots a_mb} \tag{5}$$

が成り立つ．この両辺を $m+1$ 乗して計算を進めることで，

$$\begin{aligned} b^{m+1} &\geq a_1a_2\cdots a_mb \\ b^m &\geq a_1a_2\cdots a_m && （両辺を b>0 で割る） \\ b &\geq \sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m} && （両辺の m 乗根をとる）\end{aligned}$$

が従う．これが求める不等式である．さらに，仮定 (4) から，不等式 (5) の等号成立条件は，

$$a_1=a_2=\cdots=a_m=b$$

であるが，b の定義から，この条件は，$a_1=a_2=\cdots=a_m$ であることと同値である．よって，等号成立条件についても成り立つことが確認できた． □