漸近線

定義. 曲線上の点が限りなく遠ざかるにつれて，曲線がある一定の直線に近づくとき，この直線を曲線の**漸近線**という．

まずは，この定義を正確に記述しよう．実数全体の集合を $\mathbb{R}$ として，$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．座標平面上の媒介変数表示された曲線

$$C:\ I \to \mathbb{R}^2\ ;\ t \mapsto (x(t), y(t))$$

と，直線

$$\ell:\ ax + by + c = 0$$

を考える．座標平面 $\mathbb{R}^2$ における，曲線 C 上の点 $(x(t), y(t))$ と直線 ℓ との距離を

$$d(t) = \frac{|ax(t) + by(t) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

とおく．このとき，漸近線の定義は次のように述べられる．

定義. 直線 ℓ が，曲線 C の**漸近線**であるとは，$\alpha \in I$（$\alpha = \pm\infty$ でも良い．）に対して，

$$\lim_{t \to \alpha} \left\{ (x(t))^2 + (y(t))^2 \right\} = \infty, \qquad \lim_{t \to \alpha} d(t) = 0 \tag{1}$$

が成り立つときをいう．

この定義から，次が導かれる．

命題.

- $\lim_{x \to \infty} \{x^2 + (f(x))^2\} = \infty$ を満たす曲線 $y = f(x)$ において，

$$\lim_{x \to \infty} \{f(x) - (ax + c))\} = 0 \tag{2}$$

  が成り立つとき，直線 $y = ax + c$ は曲線 $y = f(x)$ の漸近線である．

- $\lim_{x \to -\infty} \{x^2 + (f(x))^2\} = \infty$ を満たす曲線 $y = f(x)$ において，

$$\lim_{x \to -\infty} \{f(x) - (ax + c))\} = 0 \tag{3}$$

  が成り立つとき，直線 $y = ax + c$ は曲線 $y = f(x)$ の漸近線である．

証明. $y = f(x)$ 上の点 $(x, f(x))$ と直線 $y = ax + c$ の距離を $d(x)$ とおくと，

$$d(x) = \frac{|ax - f(x) + c|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|f(x) - (ax + c)|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

と書ける．このとき仮定 (2) より，$\lim_{x \to \infty} d(x) = 0$ である．よって，$y = ax + b$ は，$y = f(x)$ の漸近線である．$x \to -\infty$ の場合も同様である． □

補足. 曲線 $y = f(x)$ は，$x = x(t) = t$，$y = y(t) = f(t)$ とおく事で，媒介変数表示された曲線

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\ ;\ x \mapsto (x, f(x))$$

と見ることができる．上の命題の漸近線は，定義の漸近線 ℓ の $b = -1$ とした直線である．

上の命題の系として，次が成り立つ．

系. 曲線 $y = f(x)$ のグラフにおいて，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \quad \text{または，} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = c \tag{4}$$

が成り立つとき，直線 $y = c$ は曲線 $y = f(x)$ の漸近線である．

証明．上の命題において，$a = 0$ とすると，仮定 (2) は，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

と書き換えられる．さらにこのとき，

$$\lim_{x\to\infty} \{x^2 + (f(x))^2\} = \lim_{x\to\infty} x^2 + c^2 = \infty$$

も成り立つので，直線 $y = c$ は曲線 $y = f(x)$ の漸近線である．$x \to -\infty$ の場合も同様である． □

漸近線が x 軸に垂直である場合については，次が成り立つ．

命題. 曲線 $y = f(x)$ のグラフにおいて，

$$\lim_{x\to c+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to c+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to c-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to c-0} f(x) = -\infty \tag{5}$$

のいずれかが成り立つとき，直線 $x = c$ は曲線 $y = f(x)$ の漸近線である．

証明．$y = f(x)$ 上の点 $(x, f(x))$ と直線 $x = c$ の距離を $d(x)$ とおくと，

$$d(x) = |x - c|$$

と書けるので，

$$\lim_{x\to c} d(x) = 0$$

が成り立つ．さらに仮定から，

$$\lim_{x\to c\pm 0} \{x^2 + (f(x))^2\} = c^2 + \lim_{x\to c\pm 0} (f(x))^2 = \infty$$

も成り立つので，直線 $x = c$ は曲線 $y = f(x)$ の漸近線である． □

例. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x - 1}$ とする．$y = f(x)$ の漸近線を求めよ．

$f(x) = \dfrac{2x(x-1) + 5x}{x - 1} = 2x + \dfrac{5x}{x - 1}$ より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \{f(x) - 2x\} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x - 1} = 5$ なので，

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x) - (2x + 5)\} = 0$$

が成り立つ．よって，直線 $y = 2x + 5$ は漸近線の 1 つである．また，明らかに，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} f(x) = \infty$ であるから，直線 $x = 1$ も漸近線である．（$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$ でもある．）