アルキメデスの公理

本稿では，様々な仮定の下でアルキメデスの公理と呼ばれる次の定理を証明する[1]

定理 (アルキメデスの公理)**.** 任意の正の実数 a, b に対して，

$$b < Na$$

をみたす自然数 N が存在する．

以下では，実数全体の集合，自然数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{R}, \mathbb{N}$ 表す．まずは，実数の連続性公理を思い出す．

公理 (実数の連続性)**.** 空でない $\mathbb{R}$ の部分集合が上に（下に）有界ならば，上限（下限）が存在する．

この公理を仮定した場合の証明を紹介する．

証明. **（実数の連続性 $\Rightarrow$ アルキメデスの公理）**任意に正の実数 a, b をとる．全ての $N \in \mathbb{N}$ に対して，$b \geq Na$ が成り立つと仮定する（背理法）．$\mathbb{R}$ の部分集合 X を

$$X := \{Na \mid N \in \mathbb{N}\}$$

と定める．仮定から，全ての $x \in X$ に対して，$b \geq x$ が成り立つので，b は X の上界であり，X は上に有界である．よって，実数の連続性公理から，上限 $\sup X$ が存在するので，これを α とおく．$\alpha - a < \alpha$ であり，α は X の上限（最小上界）なので，$\alpha - a$ は，X の上界ではない．よって，

$$\alpha - a < ma$$

となる $m \in \mathbb{N}$ が存在する．これから，

$$\alpha < (m+1)a$$

が成り立つが，$m+1 \in \mathbb{N}$ なので，$(m+1)a \in X$ である．これは，$\alpha = \sup X$ に矛盾である． □

…………………………………………………………………………………

アルキメデスの定理は，当たり前に見える次の主張と同値である．

命題. アルキメデスの公理と，$\lim_{n \to \infty} n = \infty$ が成り立つことは同値である．

証明. $a_n = n$ として，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．アルキメデスの公理を仮定し，$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ を示す．任意に $K \in \mathbb{R}$ を固定する．アルキメデスの公理から，$1, K \in \mathbb{R}$ に対して，

$$K < N \cdot 1 = N$$

をみたす $N \in \mathbb{N}$ が存在する．よって，このとき，

$$n > N \Longrightarrow a_n = n > N > K$$

が従う．

逆を示す．任意に $a, b \in \mathbb{R}$ を固定する．仮定から，$K = \dfrac{b}{a}$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$N > n_0$ である全ての $N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$N = a_N > K = \frac{b}{a} \Longleftrightarrow b < Na$$

が成り立つ．よって，主張が示された． □

[1] アルキメデスの公理は，それ自身を公理として採用し，また別の事実と組み合わせることで，実数の連続性（上限定理）と同値な定理を作ることができる．例えば，アルキメデスの公理と実数の完備性を仮定することで，上限定理を証明することができる．

次に実数の連続性を仮定せずとも，有界単調数列の収束性または，Bolzano-Weierstrass の定理のどちらかを仮定することで，アルキメデスの定理が証明できることを紹介する．

定理 (有界な単調数列の収束性)．上に有界な単調増加数列は，その上限に収束する．

定理 (Bolzano-Weierstrass)．有界な数列は，収束する部分列をもつ．

まずは，有界単調数列の収束性を仮定した証明を紹介する．

証明．（**有界単調数列の収束性 ⇒ アルキメデスの公理**）任意に正の実数 a, b をとる．$n \in \mathbb{N}$ に対して，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = na$ で定め，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \leq b$ を仮定する（背理法）．仮定から，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列なので，有界単調数列の収束性から，その上限

$$s := \sup a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

に収束する．

$a > 0$ であったから，$s - a < s$ であり，$s - a$ は数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上限ではない．よって，ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$s - a < a_m = ma$$

が成り立つが，これから，

$$s < ma + a = (m+1)a = a_{m+1}$$

となり，矛盾である．よって，$b < Na$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在することが従う．　□

次に，Bolzano-Weierstrass の定理を仮定した証明を紹介する．

証明．（**Bolzano-Weierstrass の定理 ⇒ アルキメデスの公理**）任意に正の実数 a, b をとる．$n \in \mathbb{N}$ に対して，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = na$ で定め，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \leq b$ を仮定する（背理法）．$a > 0$ と仮定から，

$$a \leq a_n \leq b$$

が成り立つので，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である．よって，Bolzano-Weierstrass の定理から，収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．

そこで，この部分列の極限値を α とおくと，これから，$\dfrac{a}{2}$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$k > N \Longrightarrow |a_{n_k} - \alpha| < \frac{a}{2}$$

が成り立つ．よって，$k > N$ である全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| = |(a_{n_{k+1}} - \alpha) + (\alpha - a_{n_k})| \leq |a_{n_{k+1}} - \alpha| + |\alpha - a_{n_k}| < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a \tag{1}$$

が成り立つ．一方，部分列の項の番号 n_k は狭義単調増加である自然数の列として，定められていたので，

$$n_{k+1} - n_k \geq 1$$

が成り立つ．これと，$a > 0$ から

$$a \leq a(n_{k+1} - n_k) = a_{n_{k+1}} - a_{n_k}$$

であるが，これは (1) に矛盾である．よって，$b < Na$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ の存在が従う．　□