a^b と b^a の大小関係

定理. e をネイピア数とする．実数 a, b に対して，次が成り立つ．

- $e < a < b$ のとき，$a^b > b^a$，
- $0 < a < b < e$ のとき，$a^b < b^a$.

証明. 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ を考える．導関数は，

$$f'(x) = (\log x)'\left(\frac{1}{x}\right) + (\log x)\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

であり，$\log x$ の単調増加性から，$e < x$ なら $\log x > \log e = 1$ が成り立つので，

$$e < x \text{ のとき，} f'(x) < 0 \text{ が成り立つ.}$$

よって，$f(x)$ は，$e < x$ で単調減少であり，$e < a < b$ のとき，

$$f(a) > f(b) \Longleftrightarrow \frac{\log a}{a} > \frac{\log b}{b}$$

が成り立つ．$a > 0, b > 0$ なので，これは次と同値である．

$$b \log a > a \log b \Longleftrightarrow \log a^b > \log b^a.$$

再び，$\log x$ の単調増加性から，$a^b > b^a$ が従う．

$0 < x < e$ なら，上と同様に考えて，$f'(x) > 0$ が成り立つので，$f(x)$ は，$0 < x < e$ で単調増加である．よって，$0 < a < b < e$ のとき，

$$f(a) < f(b) \Longleftrightarrow \frac{\log a}{a} < \frac{\log b}{b}$$

が成り立つ．$a > 0, b > 0$ なので，これは，

$$b \log a < a \log b \Longleftrightarrow \log a^b < \log b^a.$$

と同値であり，$\log x$ の単調増加性から，$a^b < b^a$ が従う． □