二項定理

$(a+b)^n$ などの展開式に現れる係数を求めるのに使われる二項定理を証明する．

そのために，まずは組み合わせの総数について復習する．

n 個から r 個とる組合せの総数

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

注意． 記号 $\binom{n}{r}$ は，高校数学ではあまり見かけないかもしれないが，一般に二項係数を表す記号として用いられる．意味は ${}_n\mathrm{C}_r$ と同じである．以下でもこの記号を使用するが，その理由は単に見やすさのためだけである．

それでは本題に入る．まずは，具体例から考えよう：$(a+b)^5$ を展開する．

$$
\begin{aligned}
(a+b)^5 &= \underset{①}{(a+b)}\underset{②}{(a+b)}\underset{③}{(a+b)}\underset{④}{(a+b)}\underset{⑤}{(a+b)} \\
&= aaaaa + aaaab + aaaba + \cdots
\end{aligned}
$$

単純に 5 乗を書き並べると，このように，$(a+b)$ が 5 つ並ぶことがわかる．これを展開したときに，例えば，a^4b の項は，

$$ aaaab,\ aaaba,\ aabaa,\ abaaa,\ baaaa $$

を足し合わせたものであるから，その係数は，5 とわかる．これは，上の①〜⑤の 5 つの $(a+b)$ から a を 4 つ選ぶ組み合わせの総数である（選ばなかった残りが b である）から，${}_5\mathrm{C}_4 = 5$ と考えられる．同様にして，a^3b^2 の係数は，${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ である．以上から，他の項も同様に考えれば，

$$
\begin{aligned}
(a+b)^5 &= \binom{5}{5}a^5b^0 + \binom{5}{4}a^4b^1 + \binom{5}{3}a^3b^2 + \binom{5}{2}a^2b^3 + \binom{5}{1}a^1b^4 + \binom{5}{0}a^0b^5 \\
&= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}
$$

が従う．一般の場合も同様に考えると，次のようになる．

二項定理

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{n}a^n + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{0}b^n \\
&= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{n-r}a^{n-r}b^r = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r = \sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r
\end{aligned}
$$

証明．上と同様に証明できるが，ここでは，数学的帰納法を用いた証明を紹介する．

- $n=1$ のときは，$(\text{右辺}) = \sum_{r=0}^{1}{}_1\mathrm{C}_r a^{1-r}b^r = {}_1\mathrm{C}_0 a^{1-0}b^0 + {}_1\mathrm{C}_1 a^{1-1}b^1 = a+b = (\text{左辺})$ なので良い．

- $n=k$ のとき，$(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r a^{k-r}b^r$ が成り立つとして，$n=k+1$ の場合を考える．

$$ (a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\left(\sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r a^{k-r}b^r\right) = \sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r a^{k+1-r}b^r + \sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r a^{k-r}b^{r+1} $$

であり，右辺の第一項は，

$$\sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r a^{k+1-r} b^r = {}_k\mathrm{C}_0 a^{k+1} b^0 + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_r a^{k+1-r} b^r = a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_r a^{k+1-r} b^r$$

と計算でき，第二項は，

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r a^{k-r} b^{r+1} &= \sum_{r=0}^{k-1} {}_k\mathrm{C}_r a^{k-r} b^{r+1} + {}_k\mathrm{C}_k a^{k-k} b^{k+1} = \sum_{r=0}^{k-1} {}_k\mathrm{C}_r a^{k-r} b^{r+1} + b^{k+1} \\ &= \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_{r-1} a^{k-(r-1)} b^{(r-1)+1} + b^{k+1} = \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_{r-1} a^{k+1-r} b^r + b^{k+1}\end{aligned}$$

と計算できる．（式変形の途中で r を $r-1$ に置き換えていることに注意．）以上から，組み合わせの公式 ${}_k\mathrm{C}_r + {}_k\mathrm{C}_{r-1} = {}_{k+1}\mathrm{C}_r$ に注意して計算を進めると，

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_r a^{k+1-r} b^r + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_{r-1} a^{k+1-r} b^r + b^{k+1} \\ &= a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} ({}_k\mathrm{C}_r + {}_k\mathrm{C}_{r-1}) a^{k+1-r} b^r + b^{k+1} \\ &= a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_r a^{k+1-r} b^r + b^{k+1} \ = \ \sum_{r=0}^{k+1} k_{k+1}\mathrm{C}_r a^{k+1-r} b^r\end{aligned}$$

となり，結果が従う． □

二項定理を用いると，次のような綺麗な結果も証明できる．これは多項定理[1] と呼ばれる．

多項定理（三項の場合）

$(a+b+c)^n$ の展開式において，$n = p+q+r$ とするとき，$a^p b^q c^r$ の項の係数は，

$$\frac{n!}{p!q!r!} = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$$

である．

証明．$(a+b+c)^n = \{(a+b)+c\}^{p+q+r}$ とみると，二項定理から，$(a+b)^{p+q} c^r$ の係数は，

$$\binom{p+q+r}{p+q} = {}_{p+q+r}\mathrm{C}_{p+q} = \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!}$$

である．さらに，$(a+b)^{p+q}$ に着目し，再び二項定理を用いると，$a^p b^q$ の係数は，

$$\binom{p+q}{p} = {}_{p+q}\mathrm{C}_p = \frac{(p+q)!}{p!q!}$$

と求められる．以上から，$a^p b^q c^r$ の項の係数は，次のように計算できる．

$$\binom{p+q+r}{p+q} \cdot \binom{p+q}{p} = \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!} \cdot \frac{(p+q)!}{p!q!} = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}.$$

□

[1] 三項定理ではなく，多項定理と呼ばれるのは，一般の項数に拡張できるからである．証明は，項数に関する帰納法を用いるだけでそれほど難しくない．