



問題. 1. $\left(2x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^5$ の展開式における定数項を求めよ.

2. $(5x^2 + 3x - 2)^6$ の展開式における x^4 の項の係数を求めよ.

二項定理と展開式の係数

問題. 1. $\left(2x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^5$ の展開式における定数項を求めよ.

2. $(5x^2 + 3x - 2)^6$ の展開式における x^4 の項の係数を求めよ.

解. 1. 二項定理

$(a + b)^n$ の展開式における $a^r b^{n-r}$ の項の係数は、 ${}_n C_r$ である.

より、与式の展開式における $(x^2)^r \left(\frac{1}{x^3}\right)^{5-r}$ の項の係数は、 ${}_5 C_r 2^r (-3)^{5-r}$ である。ここで、

$$(x^2)^r \left(\frac{1}{x^3}\right)^{5-r} = x^{2r-3(5-r)} = x^{5r-15}$$

と計算できるので、これが定数になるのは、 $r = 3$ のときである。よって、定数項は、

$${}_5 C_3 2^3 (-3)^{5-3} = 720$$

と計算できる。

2. 多項定理の三項の場合の公式

$(a + b + c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ の項の係数は、 $\frac{n!}{p!q!r!}$ である。 ($p + q + r = n$)

より、 $p+q+r = 6$ とすると、与式の展開式における $(x^2)^p (x)^q (1)^r$ の項の係数は、 $\frac{6!}{p!q!r!} 5^p 3^q (-2)^r$ である。ここで、

$$(x^2)^p (x)^q (1)^r = x^4$$

となるのは、 (p, q, r) が、

$$2p + q = 4 \quad \text{かつ} \quad p + q + r = 6$$

を満たすときであるが、これを解いて、

$$(p, q, r) = (2, 0, 4), (1, 2, 3), (0, 4, 2)$$

を得る。よって、求める係数は、

$$\frac{6!}{2!0!4!} 5^2 3^0 (-2)^4 + \frac{6!}{1!2!3!} 5^1 3^2 (-2)^3 + \frac{6!}{0!4!2!} 5^0 3^4 (-2)^2 = -4740$$

と計算できる。

□