問題. 次の等式を示せ.

1. ${}_{n}\mathrm{C}_{0} + {}_{n}\mathrm{C}_{1} + {}_{n}\mathrm{C}_{2} + \cdots + n_{n}\mathrm{C}_{n} = 2^{n}$
2. ${}_{n}\mathrm{C}_{0} - {}_{n}\mathrm{C}_{1} + {}_{n}\mathrm{C}_{2} - \cdots + (-1)^{n} n_{n}\mathrm{C}_{n} = 0$
3. ${}_{n}\mathrm{C}_{1} + 2_{n}\mathrm{C}_{2} + 3_{n}\mathrm{C}_{3} + \cdots + n_{n}\mathrm{C}_{n} = n \cdot 2^{n-1}$（$n \geq 1$）

問題. n を 1 以上の整数とする．このとき，

1. $(x+y)^{n} - x^{n}$ は，y を因数に持つことを示せ.
2. $(x+y)^{n} - x^{n}$ を，y で割った多項式を $f(x, y)$ とするとき，$f(x, 0) = nx^{n-1}$ を示せ.

二項定理の応用

問題. 次の等式を示せ.

1. ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$
2. ${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n n{}_n\mathrm{C}_n = 0$
3. ${}_n\mathrm{C}_1 + 2{}_n\mathrm{C}_2 + 3{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n{}_n\mathrm{C}_n = n \cdot 2^{n-1}$（$n \geq 1$）

解. 二項定理を用いる.

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} b^1 + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n \tag{1}$$

1. 等式 (1) に $a = 1, b = 1$ を代入すれば良い.
2. 等式 (1) に $a = 1, b = -1$ を代入すれば良い.
3. $n \geq 1$ とすると，1. から，

$$_{n-1}\mathrm{C}_0 + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + {}_{n-1}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} = 2^{n-1}$$

が成り立つ．この両辺に n をかけると，等式

$$n{}_{n-1}\mathrm{C}_0 + n{}_{n-1}\mathrm{C}_1 + n{}_{n-1}\mathrm{C}_2 + \cdots + n{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$$

を得るが，ここで，左辺の各項に，二項係数の公式

$$n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = k{}_n\mathrm{C}_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

を用いると，左辺は，

$$_n\mathrm{C}_1 + 2{}_n\mathrm{C}_2 + 3{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n{}_n\mathrm{C}_n$$

と計算できる．よって，求める等式が従う． □

問題. n を 1 以上の整数とする．このとき，

1. $(x+y)^n - x^n$ は，y を因数に持つことを示せ.
2. $(x+y)^n - x^n$ を，y で割った多項式を $f(x,y)$ とするとき，$f(x,0) = nx^{n-1}$ を示せ.

解. 二項定理を用いて，

$$\begin{aligned}(x+y)^n - x^n &= {}_n\mathrm{C}_0 x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} y^1 + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n y^n - x^n \\ &= y\left({}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} y + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n y^{n-1}\right)\end{aligned}$$

と計算できるので，1. が従う．これから，

$$\begin{aligned}f(x,y) &= {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} y + {}_n\mathrm{C}_3 x^{n-3} y^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n y^{n-1} \\ &= nx^{n-1} + y\left({}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} + {}_n\mathrm{C}_3 x^{n-3} y + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n y^{n-2}\right)\end{aligned}$$

が得られる．よって，$f(x,0) = nx^{n-1}$ が従う． □