ベクトルの誕生

ベクトルの概念は，ある一人の数学者によって完成されたものではなく，様々な数学者や物理学者の考えが合わさり，生み出されたものである．その流れを大雑把に見てみたい[1]．

18 世紀までに，ベクトルにつながるような概念はいくつかあったようである．中でも，複素数平面に関する考えは，のちにベクトルの概念に繋がっていくことになる．虚数単位を i とする．複素数 $z = a + bi$ は，対応

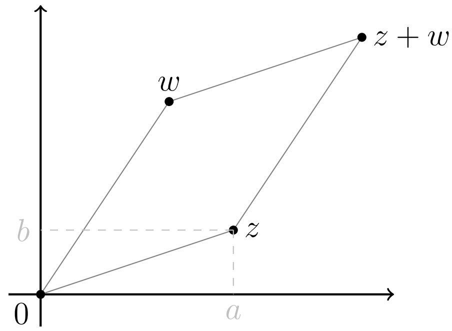
$$z = a + bi \quad \longleftrightarrow \quad (a, b)$$

により，平面上の点 (a, b) と考えられる．これを複素数平面という．
例えば，2 つの複素数 $z = a + bi,\ w = c + di$ の和

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

は，複素数平面においては，右図のように，

- 点 0 と点 z を結ぶ線分と，
- 点 0 と点 w を結ぶ線分



で定まる平行四辺形の $0, z, w$ 以外の頂点に対応している．
また，複素数 $z = a + bi$ の大きさ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ は，点 0 と点 z を結ぶ線分の長さと対応している．これらは，今日におけるベクトルの和や大きさに他ならないが，このように平面上の点を 1 つの（複素）数として扱い，計算することの有用性はこの頃から知られていたのであった．

平面（2 次元）と複素数の対応を，空間（3 次元）に拡張できないかと考えたのが，19 世紀のアイルランドの数学者ハミルトン（William Rowan Hamilton）であった．ハミルトンは，虚数単位 i のような数 j をもう 1 つ導入して，空間上の点 (a, b, c) を，$z = a + bi + cj$ という形の数に対応させられないかと考えた．さらに，この新しい数には，以下のような性質を満たすことを望んでいた：N, N', N'', X はこの新しい数とする．

1. （和と積に関する結合法則）$N + (N' + N'') = (N + N') + N''$，　$N(N'N'') = (NN')N''$
2. （和と積に関する交換法則）$N + N' = N' + N$，　$NN' = N'N$
3. （分配法則）$N(N' + N'') = NN' + NN''$
4. （除算の一意性）N, N' に対して，$NX = N'$ を満たす X が一意的に存在する
5. $(a_1 + b_1 i + c_1 j)(a_2 + b_2 i + c_2 j) = a_3 + b_3 i + c_3 j$ のとき，$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) = (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)$
6. 3 次元空間の観点から重要な解釈を持つという性質

よく知られているように，これらの性質（の 2 次元版）は，複素数が備えている性質であり，ハミルトンが，このような形で複素数の拡張を試みたのは自然であるように思う．しかし，$z = a + bi + cj$ という形では，これらの性質を満たす新しい数を構成するのは難しかったのである．

1843 年 10 月 16 日，ハミルトンは**四元数（quaternion）**を発見した．四元数とは，上記の形にもう 1 つ新しい数 k を追加した

$$z = a + bi + cj + dk$$

という形の数である．ここで，a, b, c, d は実数であり，i, j, k は次の関係を満たす：

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $ij = k,\ jk = i,\ ki = j$
- $ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$

四元数は，上記の 6 つの性質のうち，積の交換法則を除く全ての性質を満たすことが確認できる．

[1]本稿の内容は，主に，Michael J. Crowe, A history of vector analysis (1994) によるものです．

ハミルトンは，四元数

$$z = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

の a_0 の部分をスカラー部分と呼び

$$S.z = a_0$$

と表し，$a_1 i + a_2 j + a_3 k$ の部分をベクトル部分と呼び

$$V.z = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

と表した．ここで初めて，**ベクトル (vector)** という言葉が使われたのである．

ハミルトンは，四元数のベクトル部分と，空間上の点を

$$V.z = a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad \longleftrightarrow \quad (a_1, a_2, a_3)$$

と，対応させることにより，空間の点を 1 つの（四元）数として扱うことに成功したのである．スカラー部分が 0 である 2 つの四元数

$$z = a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad w = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

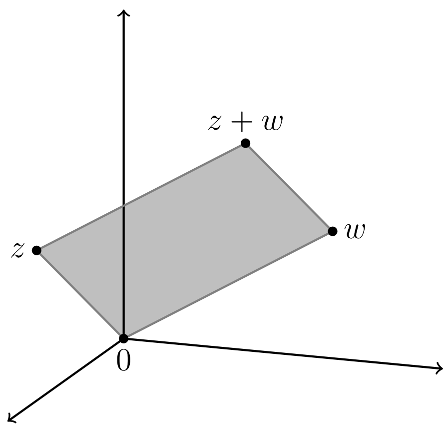
の和は，

$$z + w = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$$

であり，四元数 z の大きさ（ノルム）は，

$$||z|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

と定義される．これらは，今日における空間ベクトルの和と大きさに他ならない．



さらに驚くべきことに，四元数の積には，今日の内積と外積[2]が現れるのである．スカラー部分が 0 である 2 つの四元数 $z = a_1 i + a_2 j + a_3 k$，$w = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ の積 zw は，

$$zw = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

と計算できる．これを改めて，スカラー部分とベクトル部分に分けて表すと，

$$\begin{aligned} S.zw &= -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ V.zw &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k \end{aligned}$$

となり，スカラー部分 $S.zw$ には，内積の -1 倍が現れ，ベクトル部分 $V.zw$ には，外積（ベクトル）が現れていることがわかる[3]．

ハミルトンの死後，テイト（Peter Guthrie Tait）や，マクスウェル（James Clerk Maxwell）は，四元数を 3 次元の幾何学や物理学に応用し，様々な仕事を行った．その後，ギブス（Josiah Willard Gibbs）や，ヘビサイド（Oliver Heaviside）は，四元数の複雑な計算を避けるため，四元数の積のスカラー部分の式と，ベクトル部分の式を取り出し，2 つの積（内積「$\cdot$」と外積「$\times$」）を定義した．また，このとき初めて矢印記号も導入され，ここでの記法が現在も使われている．

[2] 2 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積とは，ベクトル $(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ のことであり，これを $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で表す．ベクトルの外積は，通常 3 次元ベクトルに対してのみ定義される．

[3] **内積 (inner product)，外積（outer product）**という言葉を初めて用いたのは，ポーランドの高校数学教師グラスマン（Hermann Günter Grassmann）である (1844 年)．しかし，グラスマンの定義した外積は，上で述べた外積とは異なり，現在のウェッジ積のことであった．