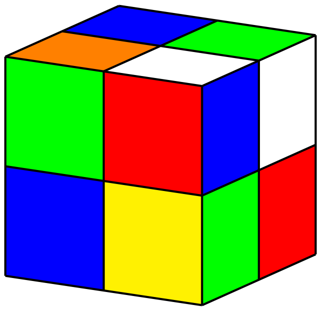
2×2 ルービックキューブの計算

右図のような 2×2 ルービックキューブ（以下では単にルービックキューブと呼ぶ.）において，バラバラになった各面の色をそろえるためには，どのように動かせば良いのか．本稿では，この疑問を計算によって解決する．ただし，最短手順を求める事はしない．

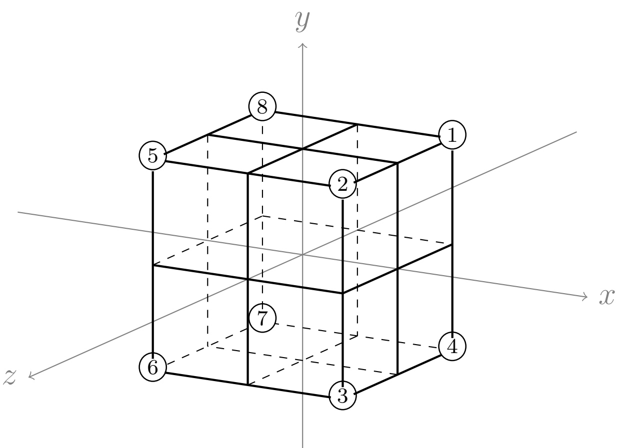


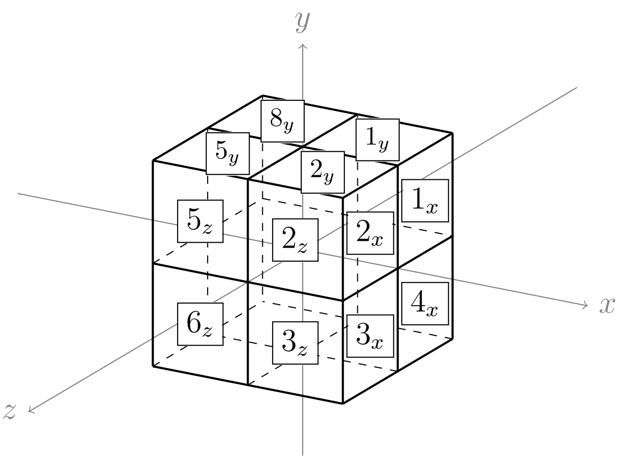
目次

場所の名前

ルービックキューブの頂点と面の場所に名前をつける．下図のように，

- ３次元空間にルービックキューブを配置する．（立方体の対角線の交点を空間の原点と合わせる．）
- 立方体の各頂点の場所に ① から ⑧ の番号をつける．
- ルービックキューブを構成している８つの小さな立方体をピースと呼ぶ．
- 頂点 ⓘ の位置にあるピースの面であって，k 軸（$k = x, y, z$）と直交する面をそれぞれ，$\boxed{i_k}$ とする．



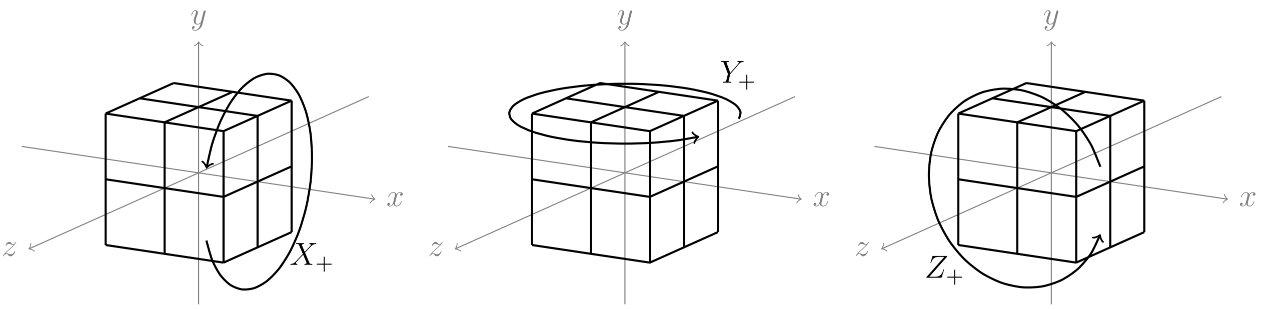


注意. 上でつけた名前は，各ピースの名前ではなく，各ピースの場所の名前であることに注意する．ピース自身を示すときは，赤青白の白の面を持つピースなどという．

基本的な写像

まず，ルービックキューブの動かし方（以下，写像という）に名前をつける．

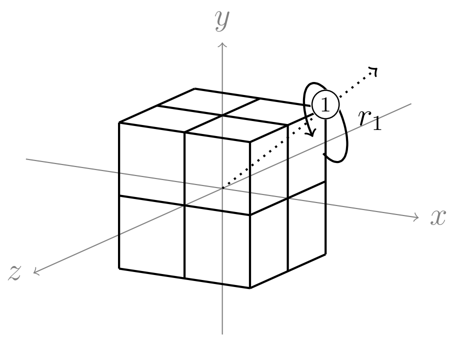
- X_+：x 軸の正の部分にある 4 つのピースを x 軸の正の向きに向かって右ねじの方向に $90°$ 動かす．
- X_-：x 軸の負の部分にある 4 つのピースを x 軸の負の向きに向かって右ねじの方向に $90°$ 動かす．
- Y_+：y 軸の正の部分にある 4 つのピースを y 軸の正の向きに向かって右ねじの方向に $90°$ 動かす．
- Y_-：y 軸の負の部分にある 4 つのピースを y 軸の負の向きに向かって右ねじの方向に $90°$ 動かす．
- Z_+：z 軸の正の部分にある 4 つのピースを z 軸の正の向きに向かって右ねじの方向に $90°$ 動かす．
- Z_-：z 軸の負の部分にある 4 つのピースを z 軸の負の向きに向かって右ねじの方向に $90°$ 動かす．



例. 写像によって，頂点 i が頂点 j のあった場所に移動することを $i \to j$ と表す．このとき，

- 写像 X_+ は，頂点を ① → ② → ③ → ④ → ① と移動させる写像であり，
- 写像 Y_- は，頂点を ③ → ⑥ → ⑦ → ④ → ③ と移動させる写像であり，
- 写像 Z_- は，頂点を ① → ④ → ⑦ → ⑧ → ① と移動させる写像である．

次に，各ピースを頂点の周りに回転させる写像を定義する．頂点 i をもつピースを，3 次元空間の原点から頂点 i の向きに向かって右ねじの方向に $120°$ 動かす写像を r_i とする（右図は r_1）．



注意. ルービックキューブを分解しない限り，写像 r_1 だけをルービックキューブに施すという事はできない．しかし，回転写像の節で述べるように，たくさんの基本的な写像を組み合わせると，$r_3 \cdot r_5^2$ などの写像は作る事ができる．ここで，$r_3 \cdot r_5^2$ とは，同時に r_3 を 1 回，r_5 を 2 回施す写像である．（写像の積については次節で定義する．）

例. 写像によって，面 $\boxed{i_k}$ が，面 $\boxed{j_l}$ のあった場所に移動することを $\boxed{i_k} \to \boxed{j_l}$ と表す．このとき，

- i が奇数なら，写像 r_i は，面を $\boxed{i_x} \to \boxed{i_z} \to \boxed{i_y}$ と移動させる写像であり，
- i が偶数なら，写像 r_i は，面を $\boxed{i_x} \to \boxed{i_y} \to \boxed{i_z}$ と移動させる写像である．
- r_i を 3 回施すという写像は，はじめから何もしないのと同じ事である．

写像の計算

上で定義した写像によって，ルービックキューブの各面がどのように移動するのかを見る．写像によって，面 $\boxed{i_k}$ が，面 $\boxed{j_l}$ のあった場所に移動することを $\boxed{i_k} \to \boxed{j_l}$ と表す．このとき，写像 X_+ は，各面を次のように動かす．（それぞれの移動において，最後の面は最初の面に写る）

$$\boxed{1_x} \to \boxed{2_x} \to \boxed{3_x} \to \boxed{4_x}\ ,\qquad \boxed{1_y} \to \boxed{2_z} \to \boxed{3_y} \to \boxed{4_z}\ ,\qquad \boxed{1_z} \to \boxed{2_y} \to \boxed{3_z} \to \boxed{4_y}$$

このことを，

$$X_+ = (1_x\ 2_x\ 3_x\ 4_x)(1_y\ 2_z\ 3_y\ 4_z)(1_z\ 2_y\ 3_z\ 4_y)$$

と表そう．この表し方によって，上で定義した 6 つの写像は，次のように表される．

$$\begin{aligned}
X_+ &= (1_x\ 2_x\ 3_x\ 4_x)(1_y\ 2_z\ 3_y\ 4_z)(1_z\ 2_y\ 3_z\ 4_y) &,\quad X_- &= (5_x\ 8_x\ 7_x\ 6_x)(5_y\ 8_z\ 7_y\ 6_z)(5_z\ 8_y\ 7_z\ 6_y),\\
Y_+ &= (1_y\ 8_y\ 5_y\ 2_y)(1_z\ 8_x\ 5_z\ 2_x)(1_x\ 8_z\ 5_x\ 2_z) &,\quad Y_- &= (3_y\ 6_y\ 7_y\ 4_y)(3_z\ 6_x\ 7_z\ 4_x)(3_x\ 6_z\ 7_x\ 4_z),\\
Z_+ &= (2_z\ 5_z\ 6_z\ 3_z)(2_x\ 5_y\ 6_x\ 3_y)(2_y\ 5_x\ 6_y\ 3_x) &,\quad Z_- &= (1_z\ 4_z\ 7_z\ 8_z)(1_x\ 4_y\ 7_x\ 8_y)(1_y\ 4_x\ 7_y\ 8_x).
\end{aligned}$$

次に複数の写像を組み合わせて新しい写像を作ることを考える．ルービックキューブに

- 写像 F を施してから写像 G を施すという写像を，$G \cdot F$ と積の形で表す．一般に，写像の積は交換可能でない（すなわち $G \cdot F \neq F \cdot G$ である）から，積の順序には注意が必要である．
- 「何もしない」という写像を 1 で表す．
- 写像 F を n 回繰り返して施すことを F^n と表す．例えば，$X_+^4 = 1$ である．
- 写像 F で動くピースを反対側に動かす写像を F^{-1} と表す．例えば，$Y_+^{-1} = Y_+^3$ である．

この表記を用いて，Z_- を施してから X_+ を施す写像 $X_+ \cdot Z_-$ を計算してみる．まず，

$$X_+ \cdot Z_- = (1_x\ 2_x\ 3_x\ 4_x)(1_y\ 2_z\ 3_y\ 4_z)(1_z\ 2_y\ 3_z\ 4_y)(1_z\ 4_z\ 7_z\ 8_z)(1_x\ 4_y\ 7_x\ 8_y)(1_y\ 4_x\ 7_y\ 8_x)$$

と書ける．ここで，F によって $\boxed{i_k} \to \boxed{j_l}$ と写されることを，$\boxed{i_k} \xrightarrow{F} \boxed{j_l}$ と表す．

- 面 $\boxed{1_x}$ に着目すると，$\boxed{1_x} \xrightarrow{Z_-} \boxed{4_y} \xrightarrow{X_+} \boxed{1_z}$ と写ることから，結果的に $\boxed{1_x} \xrightarrow{X_+ \cdot Z_-} \boxed{1_z}$ と写る．
- 面 $\boxed{1_z}$ に着目すると，$\boxed{1_z} \xrightarrow{Z_-} \boxed{4_z} \xrightarrow{X_+} \boxed{1_y}$ と写ることから，結果的に $\boxed{1_z} \xrightarrow{X_+ \cdot Z_-} \boxed{1_y}$ と写る．
- 面 $\boxed{1_y}$ に着目すると，$\boxed{1_y} \xrightarrow{Z_-} \boxed{4_x} \xrightarrow{X_+} \boxed{1_x}$ と写ることから，結果的に $\boxed{1_y} \xrightarrow{X_+ \cdot Z_-} \boxed{1_x}$ と写る．

以上より，写像 $X_+ \cdot Z_-$ は，各面を $\boxed{1_x} \to \boxed{1_z} \to \boxed{1_y}$ と写すことがわかった．（右側の括弧から順々に計算していることに注意する）他の面も同様に計算すると，

• $\boxed{2_x} \xrightarrow{Z_-} \boxed{2_x} \xrightarrow{X_+} \boxed{3_x}$	• $\boxed{3_x} \xrightarrow{Z_-} \boxed{3_x} \xrightarrow{X_+} \boxed{4_x}$	• $\boxed{4_x} \xrightarrow{Z_-} \boxed{7_y} \xrightarrow{X_+} \boxed{7_y}$	• $\boxed{7_y} \xrightarrow{Z_-} \boxed{8_x} \xrightarrow{X_+} \boxed{8_x}$	• $\boxed{8_x} \xrightarrow{Z_-} \boxed{1_y} \xrightarrow{X_+} \boxed{2_z}$
• $\boxed{2_z} \xrightarrow{Z_-} \boxed{2_z} \xrightarrow{X_+} \boxed{3_y}$	• $\boxed{3_y} \xrightarrow{Z_-} \boxed{3_y} \xrightarrow{X_+} \boxed{4_z}$	• $\boxed{4_z} \xrightarrow{Z_-} \boxed{7_z} \xrightarrow{X_+} \boxed{7_z}$	• $\boxed{7_z} \xrightarrow{Z_-} \boxed{8_z} \xrightarrow{X_+} \boxed{8_z}$	• $\boxed{8_z} \xrightarrow{Z_-} \boxed{1_z} \xrightarrow{X_+} \boxed{2_y}$
• $\boxed{2_y} \xrightarrow{Z_-} \boxed{2_y} \xrightarrow{X_+} \boxed{3_z}$	• $\boxed{3_z} \xrightarrow{Z_-} \boxed{3_z} \xrightarrow{X_+} \boxed{4_y}$	• $\boxed{4_y} \xrightarrow{Z_-} \boxed{7_x} \xrightarrow{X_+} \boxed{7_x}$	• $\boxed{7_x} \xrightarrow{Z_-} \boxed{8_y} \xrightarrow{X_+} \boxed{8_y}$	• $\boxed{8_y} \xrightarrow{Z_-} \boxed{1_x} \xrightarrow{X_+} \boxed{2_x}$

となり，写像 $X_+ \cdot Z_-$ は，各面を

$$\boxed{2_x} \to \boxed{3_x} \to \boxed{4_x} \to \boxed{7_y} \to \boxed{8_x} \to \boxed{2_z} \to \boxed{3_y} \to \boxed{4_z} \to \boxed{7_z} \to \boxed{8_z} \to \boxed{2_y} \to \boxed{3_z} \to \boxed{4_y} \to \boxed{7_x} \to \boxed{8_y}$$

と写すことがわかる．以上から，

$$X_+ \cdot Z_- = (1_x\ 1_z\ 1_y)(2_x\ 3_x\ 4_x\ 7_y\ 8_x\ 2_z\ 3_y\ 4_z\ 7_z\ 8_z\ 2_y\ 3_z\ 4_y\ 7_x\ 8_y) \tag{1}$$

と計算できる．（式に現れない面，例えば $\boxed{5_y}$ などは，写像 $X_+ \cdot Z_-$ によって動かない面である．）

入れ替え写像

それでは，いくつか主要な写像を作っていこう．まずは，２つのピース（だけ）の位置を入れ替える写像を作る．前節で説明した写像の計算方法を用いて，

$$Z_+ \cdot Y_+ \cdot X_- = (1_x\ 8_z\ 7_y\ 3_z\ 2_z)(1_y\ 8_y\ 7_z\ 3_x\ 2_y)(1_z\ 8_x\ 7_x\ 3_y\ 2_x)(5_x\ 6_z)(5_y\ 6_y)(5_z\ 6_x)$$

と計算できるので，これから，

$$S_{56} := (Z_+ \cdot Y_+ \cdot X_-)^5 = (5_x\ 6_z)(5_y\ 6_y)(5_z\ 6_x) \tag{2}$$

が得られる．これは，頂点 ⑤，⑥ の位置にあるピースを入れ替える写像である．

S_{56} と Z_+ を用いて，

$$S_{36} := Z_+ \cdot S_{56} \cdot Z_+^{-1} = (3_x\ 6_x)(3_y\ 6_z)(3_z\ 6_y) \tag{3}$$

が得られる．これは，頂点 ③，⑥ の位置にあるピースを入れ替える写像である．

Z_+，S_{56}，S_{36} を組み合わせることにより，z 軸の正の部分に位置している４つのピース，すなわち，頂点 ②, ⑤, ⑥, ③ の位置にあるピースを（面の向きを無視すれば，）自由に動かすことができる．

回転写像

次にピースの位置は入れ替えずに，いくつかのピースだけを回転させる写像を作る．計算結果 (1) を用いると，

$$\begin{aligned}(X_+ \cdot Z_-)^5 &= (1_x\ 1_y\ 1_z)(2_x\ 2_z\ 2_y)(3_x\ 3_y\ 3_z)(4_x\ 4_z\ 4_y)(7_x\ 7_y\ 7_z)(8_x\ 8_z\ 8_y)\\ &= r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot r_3^2 \cdot r_4^2 \cdot r_7^2 \cdot r_8^2\end{aligned}$$

と計算できる．さらに，同様に計算することにより，

$$(Y_+ \cdot Z_-)^5 = r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot r_4^2 \cdot r_5^2 \cdot r_7^2 \cdot r_8^2$$

と計算できるので，これらから

$$R_{355} := (X_+ \cdot Z_-)^{10} \cdot (Y_+ \cdot Z_-)^5 = r_3 \cdot r_5^2 \tag{4}$$

と計算できる．ここで定義した写像 R は，ピースの位置は入れ替えずに，頂点 ③ の位置にあるピースを，３次元空間の原点から頂点 ③ の向きに向かって右ねじの方向に 120° 回転させ，頂点 ⑤ の向きに向かって右ねじの方向に 240° 回転させる写像である．

他にも，R, S_{56}, Z_+ を組み合わせることで，

$$R_{366} := S_{56}^{-1} \cdot R_{355} \cdot S_{56} = r_3 \cdot r_6^2 \tag{5}$$

$$R_{266} := Z_+ \cdot R_{355} \cdot Z_+^{-1} = r_2 \cdot r_6^2 \tag{6}$$

などの写像を作ることができる．

注意. 上で作ったような回転写像は，一般に，

$$r_1^{n_1} \cdot r_2^{n_2} \cdot r_3^{n_3} \cdot r_4^{n_4} \cdot r_5^{n_5} \cdot r_6^{n_6} \cdot r_7^{n_7} \cdot r_8^{n_8} \qquad (0 \le n_i \le 2,\ i = 1, 2, \cdots, 8)$$

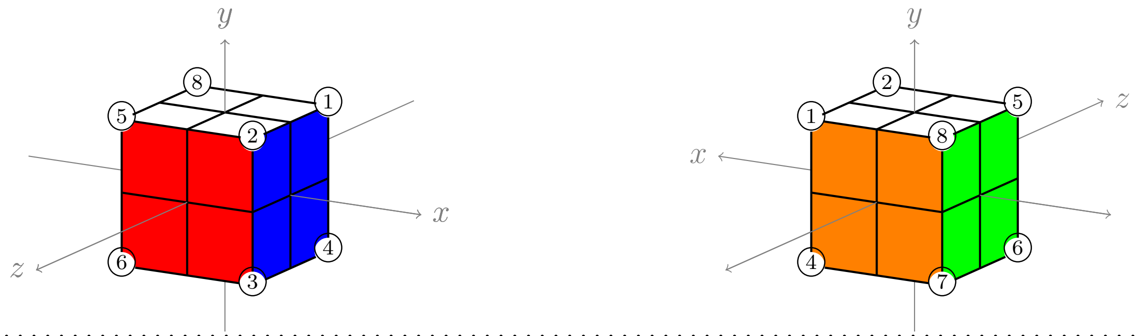
という形で書くことができるが，ルービックキューブを分解せずに動かすことのできる回転写像，すなわち，X_+, X_-, Y_+, Y_-, Z_+, Z_- の組み合わせで作られる回転写像は，

$$\sum_{i=1}^{8} n_i \equiv 0 \mod 3$$

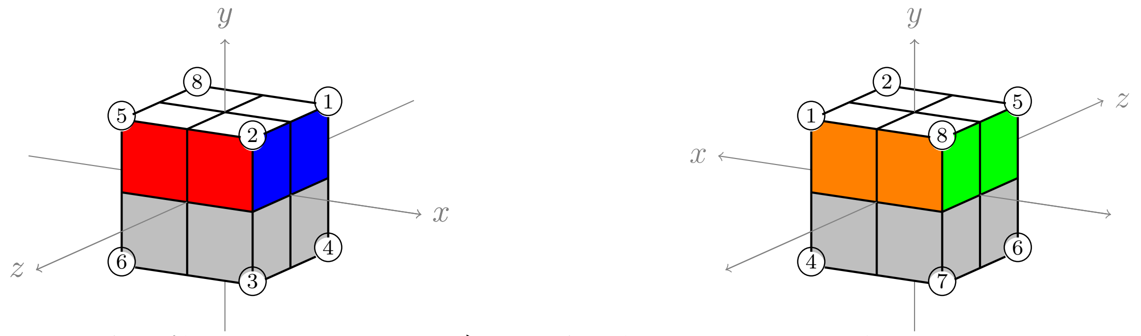
を満たすことが知られている．これについては，別の稿で考察する．

ルービックキューブのそろえ方

説明のために，使用するルービックキューブ（の色配置）を統一しておきたい．以下では，次のようなルービックキューブを使用する．ただし，面 $\boxed{3_y}$, $\boxed{4_y}$, $\boxed{7_y}$, $\boxed{6_y}$ は，黄色であるとする．

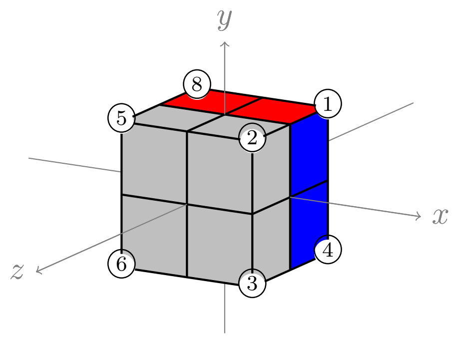


まず，ルービックキューブの白の面を揃えよう．その際に，側面の色についても隣り合う面の色が揃うように注意する．すなわち，下図のように，面 $\boxed{1_y}$, $\boxed{8_y}$, $\boxed{5_y}$, $\boxed{2_y}$ の位置に白の面を配置した時に，面 $\boxed{1_x}$, $\boxed{2_x}$ には青，面 $\boxed{2_z}$, $\boxed{5_z}$ には赤，面 $\boxed{5_x}$, $\boxed{8_x}$ には緑，面 $\boxed{8_z}$, $\boxed{1_z}$ には橙が揃うようにする．その他の面（下図のグレーの面）の色はなんでも良い．



ここまでは，結構簡単に揃えられるはずである[1]．難しいのはこれ以降であり，残り４つのピースを揃えることである．

次に，向きを変えて白の面が，面 $\boxed{1_z}$, $\boxed{4_z}$, $\boxed{7_z}$, $\boxed{8_z}$ の位置に来るようにする[2]．この時，揃っていない４つのピース（下図ではグレーのピース）が，z 軸の正の部分に来ているはずである．



さらに左図のように，面 $\boxed{1_y}$, $\boxed{8_y}$ の位置に赤が来ているようにすると，（自動的に）$\boxed{1_x}$, $\boxed{4_x}$ の位置に青，$\boxed{4_y}$, $\boxed{7_y}$ の位置に橙，$\boxed{7_x}$, $\boxed{8_x}$ の位置に緑が来ているはずである．（左図のグレーで示した位置のどこかにある）そろっていない４つのピースに次のように名前をつける：

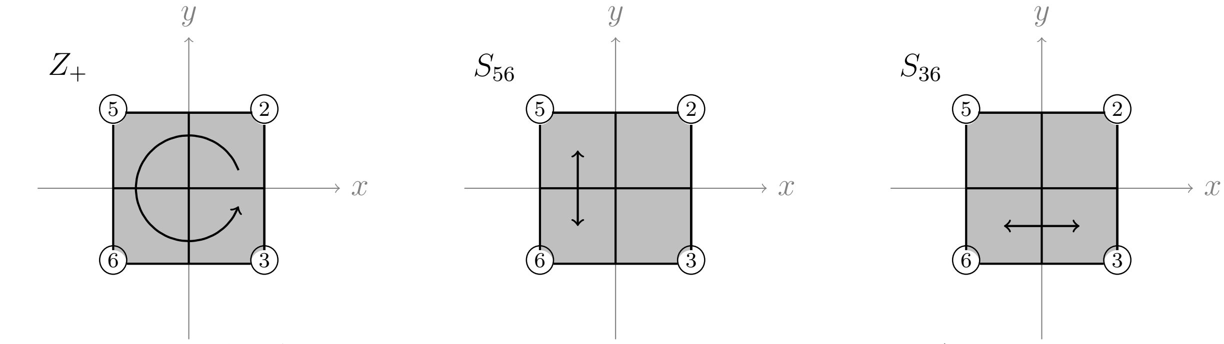
- ピース B：赤緑黄の面を持つピース，
- ピース C：緑橙黄の面を持つピース，
- ピース A：青赤黄の面を持つピース，
- ピース D：橙青黄の面を持つピース．

４つのピース A, B, C, D が，それぞれ，頂点 ②, ⑤, ⑥, ③ の位置に来て，かつ各面の色がそろえば，完成である．

[1] 簡単ではないとしても，以下に述べる方法と同じ方法（黄 → 白，青 ↔ 緑 と読み替える）で揃えられる．

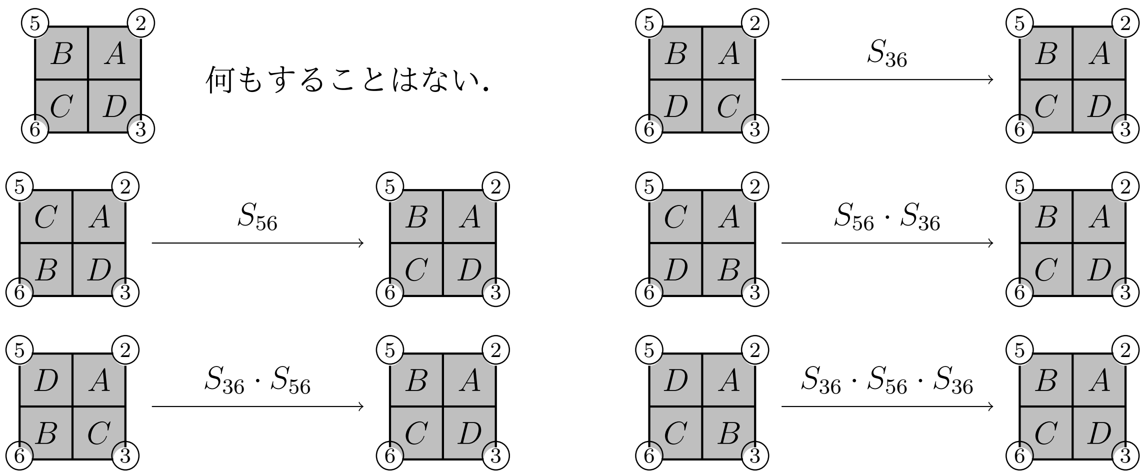
[2] 頂点 ⓘ や，面 $\boxed{i_k}$ というのは，ルービックキューブの初期位置に対応する面の名前であり，初期位置を変えれば，それに対応する面の名前も変わることに注意する．ここで「向きを変えて」というは，「初期位置を変えて」ということである．

まずは，4 つのピース A, B, C, D の位置を合わせよう．下図は，z 軸の正面から見た図である．写像 Z_+ と，入れ替え写像 S_{56}, S_{36} の動きを思い出そう．



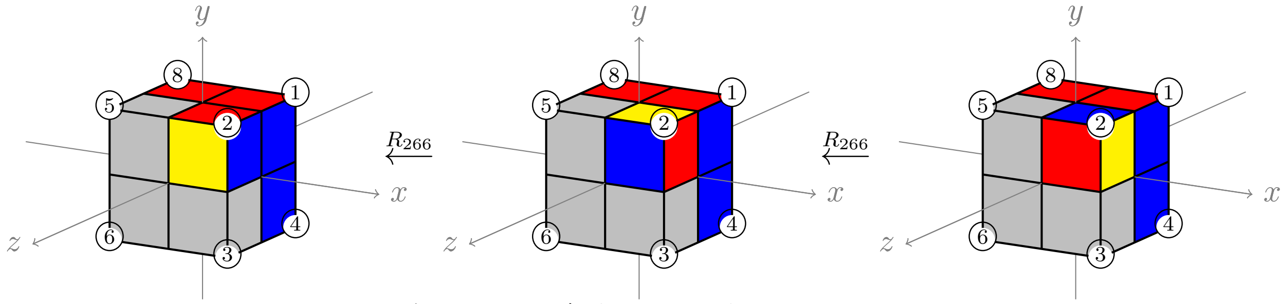
これら 3 つの写像を組み合わせることにより，ピース A, B, C, D がどのような場所にあっても，次のようにして，位置を合わせることができる．

1. 何回か Z_+ を施すことにより，ピース A を頂点 ② の位置に合わせることができる．
2. 残りの 3 つのピースは次のように合わせられる．



これで全てのピースの位置が確定したことになる．

次に，回転写像を用いて各ピースの向きを合わせていこう．はじめに，(6) で作った $R_{266} = r_2\cdot r_6^2$ を用いて，ピース A の向きを合わせる．（r_2 は，頂点 ② の位置にあるピースを，3 次元空間の原点か頂点 ② の向きに向かって，右ねじの方向に 120° 回転させる写像であった）今，頂点 ② の位置にあるピース A は，青赤黄の面を持つピースなので，向きの可能性は，次の 3 つである．



はじめから，面 c の位置に黄が来ていれば（上図左側）何もする事はない．

- 面 $\boxed{2_z}$ の位置が青（上図中央）なら，S_{226} を施すことにより，面 $\boxed{2_z}$ の位置に黄が来る．
- 面 $\boxed{2_z}$ の位置が赤（上図右側）なら，S_{226}^2 を施すことにより，面 $\boxed{2_z}$ の位置に黄が来る．

続いて，ピース B, C, D の向きを合わせていく．これには，(4),(5) で作った $R_{355} = r_3 \cdot r_5^2$ と $R_{366} = r_3 \cdot r_6^2$ を使用する．ピース B, C, D の３面の色が，それぞれ

$$B：赤緑黄, \qquad C：緑橙黄, \qquad D：橙青黄$$

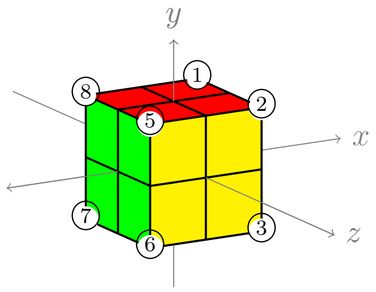
であったことを思い出す．

各ピースの状態に次のように名前をつけよう．全ての色がそろった状態，すなわち，面 $\boxed{2_z}$, $\boxed{5_z}$, $\boxed{6_z}$, $\boxed{3_z}$ が全て黄である状態を $(0,0,0,0)$ とし，これに回転写像 $r_2^{n_2} \cdot r_5^{n_5} \cdot r_6^{n_5} \cdot r_3^{n_3}$ を施すことで得られる状態を (n_2, n_5, n_6, n_3) とする．つまり，

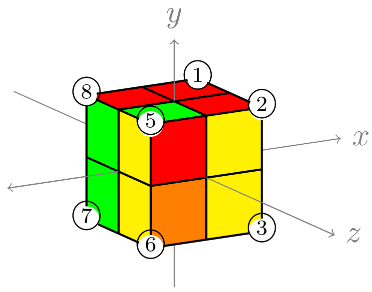
$$(0,0,0,0) \xrightarrow{r_2^{n_2} \cdot r_5^{n_5} \cdot r_6^{n_5} \cdot r_3^{n_3}} (n_2, n_5, n_6, n_3)$$

ということである．ただし，$0 \leq n_i \leq 2$, $i = 2,5,6,3$ である．

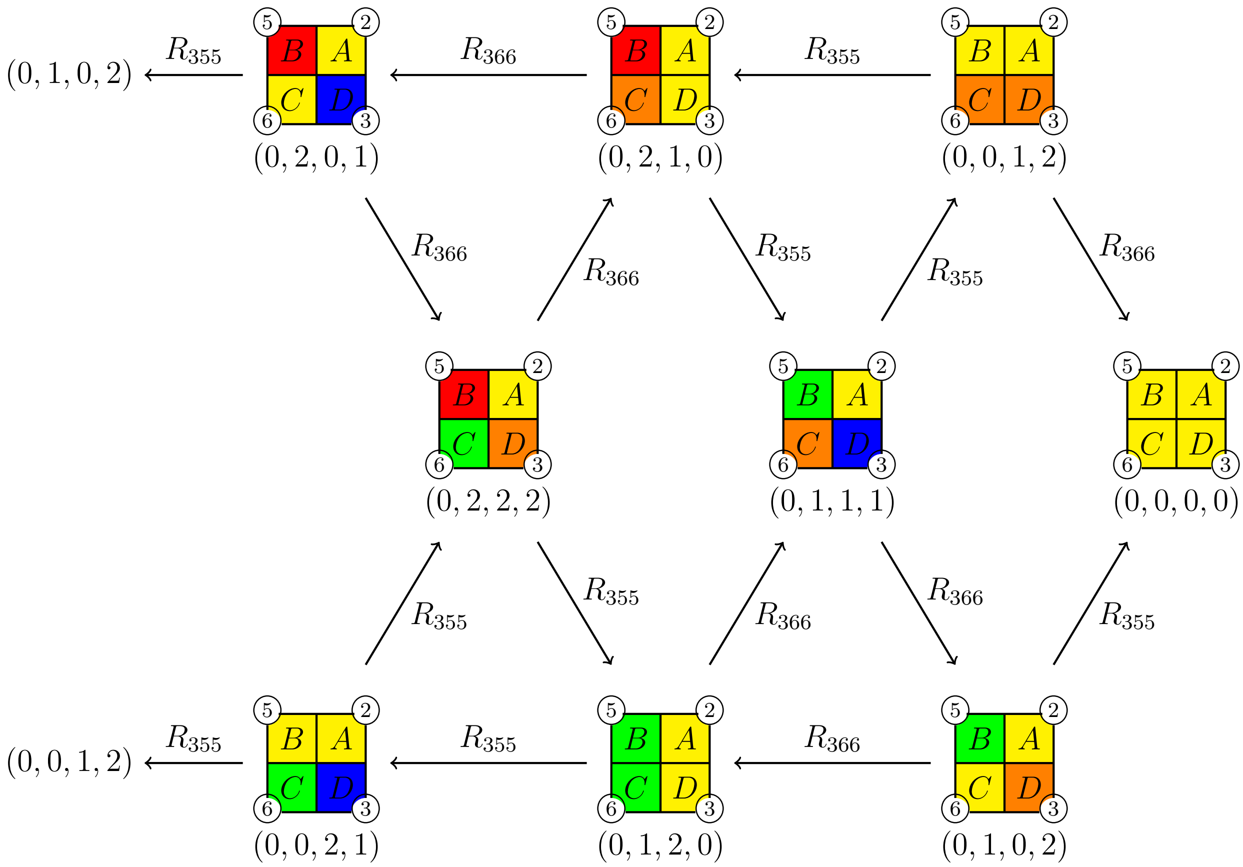
例． 下図の右側は，色のそろった状態 $(0,0,0,0)$ に，写像 $r_5^2 \cdot r_6$ を施す事で得られる状態 $(0,2,1,0)$ である．



$$(0,0,0,0) \xrightarrow{r_5^2 \cdot r_6} (0,2,1,0)$$



今，ピース A の色が合っている状態を考えているので，状態 (n_2, n_5, n_6, n_3) において，$n_2 = 0$ として良い．さらに，前節の注意で述べたように，$n_5 + n_6 + n_3 \equiv 0 \mod 3$ が成り立っている場合を考えれば十分である．以上より，考えるべき状態は，以下の９つであり，それぞれ次のように色を合わせることができる．（下図は z 軸の正面から見たずである．）



このようにして，状態 $(0,0,0,0)$ を作ることができれば，完成である．