円束

$i=1,2$ に対して，$f_i(x,y)=(x-a_i)^2+(y-b_i)^2-r_i^2$ （ただし $r_i>0$）とおき，２つの円

$$C_1: f_1(x,y)=0, \qquad C_2: f_2(x,y)=0$$

を考える．さらに，実数 k に対して，

$$F_k(x,y)=kf_1(x,y)+f_2(x,y)$$

とおくとき，図形 $F_k(x,y)=0$ について考察しよう．$k=0$ のとき，図形 $F_0(x,y)=0$ は，明らかに円 C_2 のことであるから，以下では，$k\neq 0$ を仮定する．また，$k=\dfrac{1}{k'}$ とおくことにより，

$$F_k(x,y)=0 \Longleftrightarrow f_1(x,y)+k'f_2(x,y)=0$$

であるから，２つの円 C_1, C_2 の半径に関して，$r_1 \geq r_2$ を仮定しても一般性を失わない．

命題. $k=-1$ とする．このとき，図形 $F_{-1}(x,y)=0$ は，次のとおりである．

(i) C_1, C_2 が同心円でない，すなわち $(a_1,b_1)\neq(a_2,b_2)$ なら，$F_{-1}(x,y)=0$ は，直線である．

(ii) C_1, C_2 が同心円で，$r_1\neq r_2$ なら，$F_{-1}(x,y)=0$ を満たす点は存在しない．

(iii) C_1, C_2 が同じ円，すなわち $(a_1,b_1,r_1)=(a_2,b_2,r_2)$ なら，$F_{-1}(x,y)=0$ は全平面である．

証明. (i) $F_{-1}(x,y)=2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y-(a_1^2-a_2^2)-(b_1^2-b_2^2)+(r_1^2-r_2^2)$ と計算できるので，仮定 $(a_1,b_1)\neq(a_2,b_2)$ から，$F_{-1}(x,y)=0$ は直線である．

(ii) $F_{-1}(x,y)=r_1^2-r_2^2$ なので，仮定 $r_1\neq r_2$ から，任意の (x,y) に対して，$F_{-1}(x,y)\neq 0$ である．

(iii) 明らかに，任意の (x,y) に対して，$F_{-1}(x,y)=0$ が成り立つ．

□

補足. $f(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$ とおく $(r>0)$．円 $f(x,y)=0$ と点 (α,β) に対して定まる値 $f(\alpha,\beta)$ のことを方べきの値という．方べきの値とは，その定義から，(点と円の中心の距離)^2 − (円の半径)^2 のことである．２つの円に対して，方べきの値が等しい点の集合のことを根軸という．よって，命題の (i) の直線は，$f_1(x,y)=f_2(x,y)$ を満たす点の集合なので，C_1, C_2 の根軸である．詳しくは，根軸と根軸定理[1] を参照のこと．

以下では，$k\neq -1, 0$ を仮定し，$r_1\geq r_2$ も引き続き仮定する．また，C_1, C_2 の中心間の距離を d とする．$d^2=(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} F_k(x,y) &= \left(x-\frac{ka_1+a_2}{k+1}\right)^2+\left(y-\frac{kb_1+b_2}{k+1}\right)^2+\frac{k(a_1-a_2)^2+k(b_1-b_2)^2-(k+1)(kr_1^2+r_2^2)}{(k+1)^2} \\ &= \left(x-\frac{ka_1+a_2}{k+1}\right)^2+\left(y-\frac{kb_1+b_2}{k+1}\right)^2-\frac{r_1^2k^2+r_2^2+(r_1^2+r_2^2-d^2)k}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

と計算できるので，図形 $F_k(x,y)=0$ は，

$$\left(x-\frac{ka_1+a_2}{k+1}\right)^2+\left(y-\frac{kb_1+b_2}{k+1}\right)^2=\frac{r_1^2k^2+r_2^2+(r_1^2+r_2^2-d^2)k}{(k+1)^2}$$

を満たす点 (x,y) 全体の集合である．右辺の分子にある k の二次式を $g(k)$ とおく，すなわち，

$$g(k)=r_1^2k^2+(r_1^2+r_2^2-d^2)k+r_2^2$$

[1] https://gleamath.com/radical-axis-thm

とおくと，図形 $F_k(x,y)=0$ は，$g(k)$ の値により，次のように分類できる．

$$\begin{aligned} &g(k)>0 \Longleftrightarrow F_k(x,y)=0 \text{ は円}, \\ &g(k)=0 \Longleftrightarrow F_k(x,y)=0 \text{ は 1 点} \left(\frac{ka_1+a_2}{k+1}, \frac{kb_1+b_2}{k+1}\right), \\ &g(k)<0 \Longleftrightarrow F_k(x,y)=0 \text{ を満たす点 } (x,y) \text{ は存在しない．} \end{aligned} \tag{1}$$

$g(k)$ の判別式を D とおく．すなわち，$D=(r_1^2+r_2^2-d^2)^2-4r_1^2r_2^2$ とおくと，

$$D=(r_1+r_2+d)(r_1+r_2-d)(r_1-r_2+d)(r_1-r_2-d)$$

と因数分解できる．ここで，２円の位置関係[2] は，r_1,r_2,d の大小関係により分類できるが，それに応じて変化する D の符号は次のようにまとめられる．（$r_1 \geq r_2$ は仮定している．）

1. C_1 の内部に，C_2 がある．すなわち，$d<r_1-r_2$ のとき，$D>0$,
2. C_1 と C_2 が内接している．すなわち，$r_1-r_2=d$ のとき，$D=0$,
3. C_1 と C_2 が 2 点で交わる．すなわち，$r_1-r_2<d<r_1+r_2$ のとき，$D<0$,
4. C_1 と C_2 が外接している．すなわち，$d=r_1+r_2$ のとき，$D=0$,
5. C_1 の外部に，C_2 がある．すなわち，$r_1+r_2<d$ のとき，$D>0$.

命題． $k \neq -1,0$ とし，$r_1 \geq r_2$ を仮定する．

1. C_1 の内部に，C_2 がある場合，$k>0$ なら，図形 $F_k(x,y)=0$ は円をなす．
2. 内接の場合，$k=\dfrac{r_2}{r_1}$ で，図形 $F_k(x,y)=0$ は 1 点（接点）となり，その他の k では円をなす．
3. ２点で交わっている場合は，図形 $F_k(x,y)=0$ は，２交点を通る円をなす．
4. 外接の場合，$k=-\dfrac{r_2}{r_1}$ で，図形 $F_k(x,y)=0$ は 1 点（接点）となり，その他の k では円をなす．
5. C_1 の外部に，C_2 がある場合，$k<0$ なら，図形 $F_k(x,y)=0$ は円をなす．

証明． $g(k)$ の形から，$(r_1^2+r_2^2-d^2)k>0$ であれば，$g(k)>0$ となり，$F_k(x,y)=0$ は円をなす．

- $d<r_1-r_2$ のとき，$r_1^2+r_2^2-d^2>2r_1r_2>0$ なので，$k>0$ なら，$g(k)>0$ である．
- $r_1+r_2<d$ のとき，$r_1^2+r_2^2-d^2<-2r_1r_2<0$ なので，$k<0$ なら，$g(k)>0$ である．

よって，主張の $1,5$ が従う．

$d=r_1 \pm r_2$ のとき，$D=0$ なので，ある 1 つの k に対して，$g(k)=0$ となり，このとき，$F_k(x,y)=0$ は 1 点となる．この k を求める．いま，$r_1^2+r_2^2-d^2=\mp 2r_1r_2$ なので，

$$g(k)=r_1^2k^2 \mp 2r_1r_2k+r_2^2=(r_1k \mp r_2)^2$$

と計算でき，$g\left(\pm\dfrac{r_2}{r_1}\right)=0$ が成り立つ．このとき，図形 $F_k(x,y)=0$ は，1 点 $\left(\dfrac{\pm r_2a_1+r_1a_2}{r_1 \pm r_2}, \dfrac{\pm r_2b_1+r_1b_2}{r_1 \pm r_2}\right)$ であり，これらは中心を結ぶ線分のの内分（外分）点であり，その比から 2 円の接点となっていることがわかる．よって，主張の $2,4$ が従う．

3. は，$D<0$ であることから明らかである．詳しくは，2 円の交点を通る図形の方程式[3] を参照． □

補足． $F_k(x,y)=0 \Leftrightarrow f_1(x,y):f_2(x,y)=1:-k$ と見ることにより，図形 $F_k(x,y)=0$ は，２円 C_1,C_2 の方べきの値の比が $1:-k$ である点全体の集合であることがわかる．円周上の点における方べきの値は 0 であるから，２円に共有点があれば，図形 $F_k(x,y)=0$ はその点を含むことが容易にわかる．

[2] https://gleamath.com/relationship-circles
[3] https://gleamath.com/relationship-circles02