円の方程式

点 O を原点とする座標平面上に円を描く．円は

定点（中心）からの距離（半径）が等しい点の集まり

であったので，中心と半径を決めれば，円は 1 つに決まることがわかる．また，円の方程式も上の円の定義から導かれる．

円の方程式（基本形）

中心が (a,b) で，半径が r である円の方程式は，

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

である．特に，中心が原点である円の方程式は，$x^2+y^2=r^2$ となる．

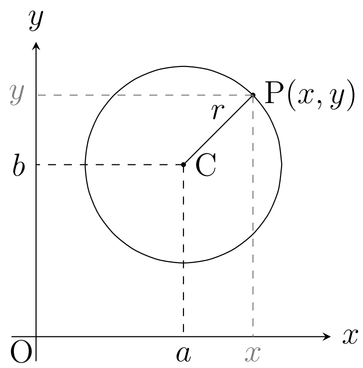
証明. 求める円の中心を $\mathrm{C}(a,b)$ とする．
円周上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ をとると，円の定義から，

$$\mathrm{CP}=r$$

が成り立つ．また，2 点間の距離の公式から，

$$\mathrm{CP}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

が成り立つので，これを上に代入して，両辺を 2 乗することで，結果の式が得られる．



□

中心と半径を決めなくても，通る 3 点を決めれば，円は 1 つに決まることがわかる．すなわち通る 3 点が決まっていれば，それらを通る円の方程式が決定できるはずである．このような場合にも対応できるように，円の方程式の一般形を考えよう．

上で求めた円の方程式（基本形）の形から，x^2 と y^2 の項の係数は 1 としてよく，さらに，xy の項や 3 次以上の項が現れないこともわかる．このことをふまえて，円の方程式（一般形）の候補として，次のような方程式を考えることができる．

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \tag{1}$$

どのような (l,m,n) の組に対しても，この方程式が円を表すのかを確認しなければならない．そのために，x と y に対して平方完成を行うことで，次のように (1) 式を変形する．

$$\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}\right)^2 \tag{2}$$

基本形と比較し，半径 r にあたる部分 $\dfrac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}$ は正の数でなければならないことがわかる．よって，(1) 式が円を表すためには，$l^2+m^2-4n>0$ となることが必要であり，逆にこれを満たす (l,m,n) の組に対しては，(1) 式は，中心 $\left(-\dfrac{l}{2},-\dfrac{m}{2}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}$ の円を表すことがわかる．以上のことをまとめておこう．

円の方程式（一般形）

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \qquad (l^2+m^2-4n>0)$$

それでは，円の方程式の確認のために，次の例題を解いてみよう．

例． 3 点 $(3,5),(4,2),(-1,-3)$ を通る円の中心と半径を求めなさい．

解．求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする．この円が，

(i) 点 $(3,5)$ を通ることから，$3^2+5^2+3l+5m+n=0 \Longleftrightarrow 3l+5m+n=-34$，

(ii) 点 $(4,2)$ を通ることから，$4^2+2^2+4l+2m+n=0 \Longleftrightarrow 4l+2m+n=-20$，

(iii) 点 $(-1,-3)$ を通ることから，$(-1)^2+(-3)^2-l-3m+n=0 \Longleftrightarrow -l-3m+n=-10$

が成り立つ．あとは連立方程式を解けば良い．

(iv) (i)$-$(ii) から，$-l+3m=-14$，

(v) (i)$-$(iii) から，$l+2m=-6$

が成り立ち，(iv)+(v) から，$m=-4$ を得る．順々に代入することで，$l=2, n=-20$ も得られる．よって，求める円の方程式の一般形は，

$$x^2+y^2+2x-4y-20=0$$

とわかる．最後に中心と半径を求めたいので，平方完成を施し，基本形に変形すると，

$$(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$$

が得られる．よって，求める円の中心は $(-1,2)$ であり，半径は 5 である． □

通る点が 2 つしかわかっていない場合は，円は 1 つに決まらないが，その 2 点が円の直径であるという条件が付加されれば，円は 1 つに決まる．このような場合について考えてみよう．

2 点 A, B を直径とする円の方程式を求めたいする．（もちろん A, B の座標はわかっているとする．）A, B の中点を M とすると，点 M は，求める円の中心であり，半径は AM = BM なので，基本形を用いて簡単に円の方程式を導くことができる．しかし，次では少し違う視点からこの問題を考えてみよう．

円の方程式

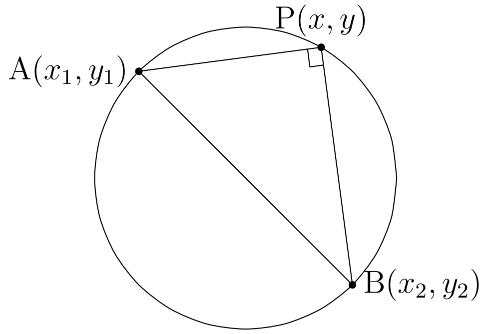
2 点 $\mathrm{A}(x_1,y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,y_2)$ を直径とする円の方程式は，

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

である．

証明．直径に対する円周角は常に直角であることに注意する．
円周上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ をとると，三平方の定理から，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=\mathrm{AB}^2$$



が成り立つ．よって，2 点間の距離の公式から，

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{aligned}(x-x_1)^2+(x-x_2)^2-(x_1-x_2)^2 &= 2(x-x_1)(x-x_2)\\ (y-y_1)^2+(y-y_2)^2-(y_1-y_2)^2 &= 2(y-y_1)(y-y_2)\end{aligned}$$

と計算できることに注意すると，結果の式が得られる．

□