3点を通る円の方程式（ベクトルによる考察）

座標平面上の3点が与えられたとき，この3点が一直線上になければ，それらの点を通る円が1つ定まる．このような円の方程式は，円の方程式（一般形）

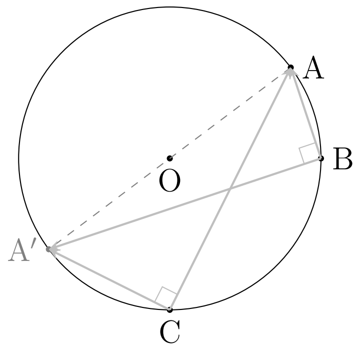
$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \qquad (l^2 + m^2 - 4n > 0) \tag{1}$$

を用いて，求めることができる[1]．本稿では，このような問題の別解として，ベクトルを用いた解法を紹介する．

例． 3点 $\mathrm{A}(3,5), \mathrm{B}(4,2), \mathrm{C}(-1,-3)$ を通る円の方程式を求めなさい．

解．求める円を C として，その中心を $\mathrm{O}(p,q)$ とする．直線 AO と円 C の（点Aではない方の）交点を $\mathrm{A}'(s,t)$ とおくと，線分 AA' は円 C の直径である．その中点が O であることから，

$$p = \frac{3+s}{2},\ q = \frac{5+t}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad s = 2p-3,\ t = 2q-5$$



が成り立つ．また，線分 AA' が円 C の直径であることと，円周角の定理から，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BA}'}, \quad \overrightarrow{\mathrm{CA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CA}'} \tag{2}$$

が成り立つ．$\vec{0}$ でない2つのベクトルが垂直であることと，その内積の値が0であることは同値なので，(2) は，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}'} = 0, \quad \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}'} = 0 \tag{3}$$

と同値である．ここで，ベクトル $\mathrm{BA}, \mathrm{BA}', \mathrm{CA}, \mathrm{CA}'$ の成分表示はそれぞれ，

$$\begin{aligned} \mathrm{BA} &= (3-4, 5-2) = (-1, 3), & \mathrm{CA} &= (3+1, 5+3) = (4, 8), \\ \mathrm{BA}' &= (s-4, t-2) = (2p-7, 2q-7), & \mathrm{CA}' &= (s+1, t+3) = (2p-2, 2q-2) \end{aligned}$$

と計算できるので，(3) の各内積の値は，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}'} = -(2p-7) + 3(2q-7) = -2p + 6q - 14$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}'} = 4(2p-2) + 8(2q-2) = 8p + 16q - 24$$

である．よって，(3) から得られる連立方程式

$$\begin{cases} p - 3q + 7 &= 0 \\ p + 2q - 3 &= 0 \end{cases}$$

を解くことで，$p = -1, q = 2$ が得られる．これは，円 C の中心の座標 $\mathrm{O}(-1,2)$ が得られたことを意味する．最後に円の半径は，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{(3+1)^2 + (5-2)^2} = 5$$

と計算できるので，以上から，円 C の方程式 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$ が得られる． □

注意． 高校数学において，ベクトルが垂直であるということは，$\vec{0}$ でない2つのベクトルのなす角が 90° であることとして定義される．そのため，厳密には，$\overrightarrow{\mathrm{BA}'} \neq \vec{0}$ や，$\overrightarrow{\mathrm{CA}'} \neq \vec{0}$ を確認してからでないと，上の (2) のように書くことはできない．しかし，$\vec{0}$ との内積の値は0であることが定義されるので，任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$ または，$\vec{b} = 0$ または，$\vec{a} \perp \vec{b}$ が成り立つ．よって，$\overrightarrow{\mathrm{BA}'} \neq \vec{0}$ や，$\overrightarrow{\mathrm{CA}'} \neq \vec{0}$ を確認しなくても，(3) のように書くことはできる．

---

[1] 与えられた3点の座標を円の方程式 (1) に代入し，l, m, n についての連立方程式を解けば良い．詳しくは，https://gleamath.com/circle-equation/ を参照．