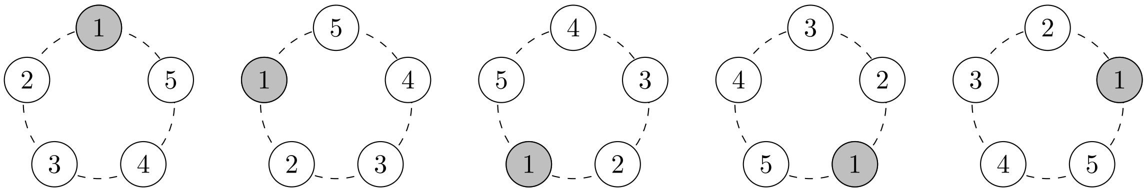
円順列・数珠順列

定義. ものを円形に並べたものを**円順列**という．円順列では，円を回転して一致するものは同じものとして考える．

例えば，下の５つはどれも回転して一致するので，円順列としては同じものとして考える．

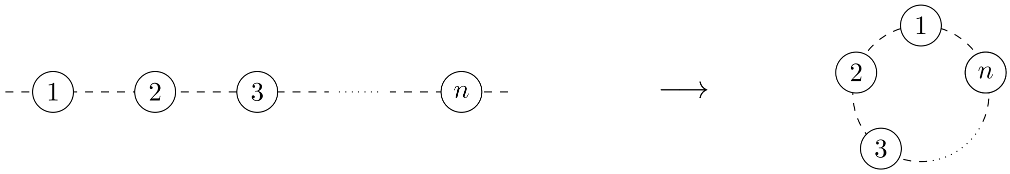


円順列の総数は次のようになる．

> **円順列の総数**
>
> 異なる n 個のものの円順列の総数は，$(n-1)!$ 通りである．

証明．２通りの考え方を紹介する．

- n 個のものの（１列に並べる）順列を考え，その両端を繋げると，１つの円順列ができる．



このようにしてできた１つの円順列に対応するもとの順列は，n 個ある．例えば，

①②③, $\cdots$ ⓝ　や，　②③④, $\cdots$ ⓝ①

は，この方法で同じ円順列を作る．よって，求める円順列の総数は，n 個のものを１列に並べる順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ を n で割れば良いので，

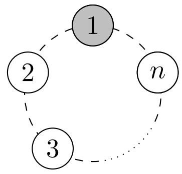
$$n! \div n = (n-1)!$$

となり結果が従う．

- １つのものを固定して円順列を考える．

固定したもの以外の $n-1$ 個のものを，円形に並べる総数は，$(n-1)!$ である．このようにして作られた円順列はどれも（１つを固定しているので，）回転させても一致しない．よって，$(n-1)!$ が求める円順列の総数である．

固定

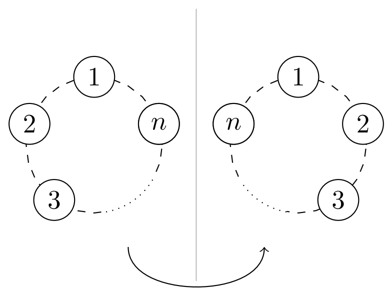


□

円順列では，回転して一致するものは同じものとみなしていた．それに加えて，裏返して一致するものを同じとみなす並べ方を**数珠順列**という．数珠順列の総数は次のようになる．

> **数珠順列の総数**
>
> 異なる n 個のものの数珠順列の総数は，$\dfrac{(n-1)!}{2}$ 通りである．

証明．右図のように，裏返して同じになる円順列は，円順列としては違うものである．言い換えると，裏返して同じになる円順列の組を数珠順列では同じものとみなす．よって，求める数珠順列の総数は，円順列の総数を２で割ったものになる．　□



裏返す