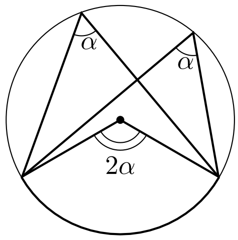
円周角の定理とその逆

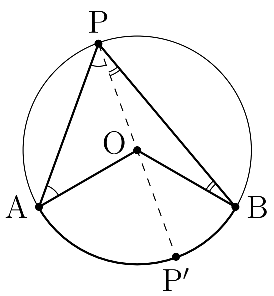
円周角の定理

1 つの弧に対する円周角は一定であり，その弧に対する中心角の半分である．



証明．次の 3 つの場合それぞれにおいて，円周角が中心角の半分になっていることを示せば，1 つの弧に対する円周角が一定であることが従う．

(i) ．



左の図において，$\angle\mathrm{APO} = \alpha$，$\angle\mathrm{BPO} = \beta$ とすると，

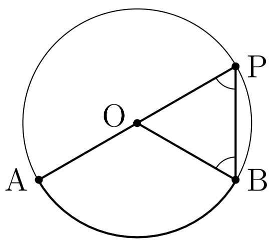
$$\angle\mathrm{APB} = \alpha + \beta \quad \text{（円周角）}$$

である．$\mathrm{OA} = \mathrm{OP}$（円の半径）より，$\triangle\mathrm{AOP}$ は二等辺三角形である．よって，$\angle\mathrm{PAO} = \angle\mathrm{APO} = \alpha$ である．同様に，$\triangle\mathrm{BOP}$ は二等辺三角形なので，$\angle\mathrm{PBO} = \angle\mathrm{BPO} = \beta$ である．また，三角形の外角は，それに隣合わない 2 つの内角の和に等しいから，$\angle\mathrm{AOP'} = 2\alpha$ と，$\angle\mathrm{BOP'} = 2\beta$ がわかる．以上より，

$$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AOP'} + \angle\mathrm{BOP'} = 2\alpha + 2\beta \quad \text{（中心角）}$$

が成り立つ．

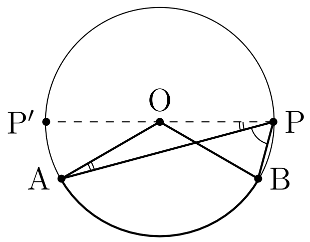
(ii) ．



左の図において，$\angle\mathrm{APB} = \alpha$ とすると，これが円周角である．$\mathrm{OB} = \mathrm{OP}$（円の半径）より，$\triangle\mathrm{BOP}$ は二等辺三角形である．よって，次が成り立つ．$\angle\mathrm{PBO} = \angle\mathrm{BPO} = \angle\mathrm{APB} = \alpha$ である．三角形の外角は，それに隣合わない 2 つの内角の和に等しいから，

$$\angle\mathrm{AOB} = 2\alpha \quad \text{（中心角）}.$$

(iii) ．

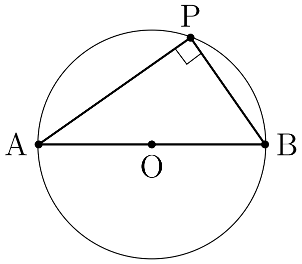


左の図において，$\angle\mathrm{APB} = \alpha$ とすると，これが円周角である．$\angle\mathrm{APP'} = \beta$ とする．$\mathrm{OB} = \mathrm{OP}$（円の半径）より，$\triangle\mathrm{BOP}$ は二等辺三角形である．よって，$\angle\mathrm{PBO} = \angle\mathrm{BPO} = \alpha + \beta$ である．また，三角形の外角は，それに隣合わない 2 つの内角の和に等しいから，$\angle\mathrm{BOP'} = 2(\alpha + \beta)$ がわかる．同様に，$\triangle\mathrm{AOP}$ は二等辺三角形なので，$\angle\mathrm{PAO} = \angle\mathrm{APO} = \beta$ であり，$\angle\mathrm{AOP'} = 2\beta$ である．以上より，次が成り立つ．

$$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOP'} - \angle\mathrm{AOP'} = 2\alpha \quad \text{（中心角）}.$$

□

例. 右のような円に対して，
AB が直径であるとすると，$\angle \mathrm{AOB} = 180^\circ$ なので，円周角の定理から，$\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$（直角）がわかる．
逆に $\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$（直角）とすると，円周角の定理から，$\angle \mathrm{AOB} = 2 \times \angle \mathrm{APB} = 180^\circ$ がわかる．よってこのとき，線分 AB は円の直径である．



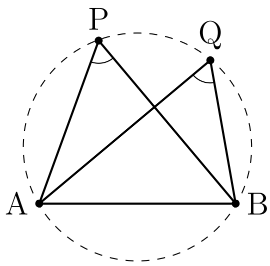
したがって，円周角の定理から次が成り立つ．

$$\mathrm{AB}\text{ が直径} \iff \angle \mathrm{APB} = 90^\circ$$

次に円周角の定理の逆を証明する．

円周角の定理の逆

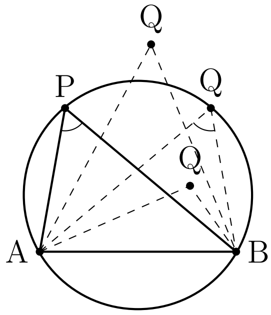
4 点 A, B, P, Q について，P, Q が直線 AB に対して同じ側にあって，$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$ が成り立つならば，4 点 A, B, P, Q は，1 つの円周上にある．



円周角の定理の逆を証明する前に，次の補題を証明する．

補題. ある円周上に 3 点 A, B, P があるとする．直線 AB に対して，点 Q が点 P と同じ側にあるとき，次が成り立つ．

- 点 Q が円の周上にある $\Longrightarrow \angle \mathrm{AQB} = \angle \mathrm{APB}$
- 点 Q が円の外側にある $\Longrightarrow \angle \mathrm{AQB} < \angle \mathrm{APB}$
- 点 Q が円の内側にある $\Longrightarrow \angle \mathrm{AQB} > \angle \mathrm{APB}$



証明. 点 Q が円周上にあるときは，円周角の定理より成り立つ事がわかる．

点 Q が円の外側にあるとする．線分 QB と円周との交点（のうち点 B とは違う方）を R とすると，円周角の定理より，$\angle \mathrm{ARB} = \angle \mathrm{APB}$ である．さらに，$\triangle \mathrm{AQB}$ と $\triangle \mathrm{ARB}$ を比べることで，$\angle \mathrm{AQB} < \angle \mathrm{ARB}$ がわかる．よって，この場合も成り立つ．

点 Q が円の内側にあるとする．線分 QB を延長した直線と円周との交点（のうち点 B とは違う方）を R とすると，円周角の定理より，$\angle \mathrm{ARB} = \angle \mathrm{APB}$ である．さらに，$\triangle \mathrm{ARB}$ と $\triangle \mathrm{AQB}$ を比べることで，$\angle \mathrm{ARB} < \angle \mathrm{AQB}$ がわかる．よって，この場合も成り立つ． □

円周角の定理の逆の証明. 上の補題の対偶を考えることで次がわかる．

- $\angle \mathrm{AQB} \geqq \angle \mathrm{APB} \Longrightarrow$ 点 Q が円の外側にない，すなわち円周上か内側にある．
- $\angle \mathrm{AQB} \leqq \angle \mathrm{APB} \Longrightarrow$ 点 Q が円の内側にない，すなわち円周上か外側にある．

今，$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$ であるので，点 Q は，円周上にある事がわかる． □