組合せ

定義. 異なる n 個のものから r 個取り出して，まとめたものを n **個から** r **個とる組合せ**といい，その総数（場合の数）を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す．（$0 < r \leqq n$）

注意. 順列の場合と違うのは，「取り出したものを並べない」という点である．順列を学んだ時のように，「取り出して並べる」を「取り出す順番」と考えると，組合せについては，取り出す順番は関係ないということである．

n 個から r 個とる組合せの総数について，次が成り立つ．

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

証明. n 個のものから，一斉に r 個取り出し，その後，取り出した r 個のものを並べていく．

これは，n 個から r 個とる順列であるので，${}_n\mathrm{P}_r$ 通りである．一方，一斉に取り出す取り出し方は，定義から，${}_n\mathrm{C}_r$ 通りであり，その後の並べ方は，$r!$ 通りである．よって次の等式を得る．

$$ {}_n\mathrm{P}_r = r! \times {}_n\mathrm{C}_r $$

これを解けば良い．

後半は，順列の公式 ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ から従う．

n 個のものから $\cdots$

一斉に r 個取り出す	${}_n\mathrm{C}_r$
	$\times$
取り出した r 個を並べる	$r!$
	$\|$
r 個取り出して並べる	${}_n\mathrm{P}_r$

□

定義. ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ と定義する．

組合せの基本公式

(i) ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$　(ii) ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$　(iii) $r \cdot {}_n\mathrm{C}_r = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

証明. (i)

$$ {}_n\mathrm{C}_{n-r} = \frac{n!}{\{n-(n-r)\}!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_r $$

(ii)

$$ \begin{aligned} {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!r!} + \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!(r-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} + \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} \\ &= \{(n-r)+r\}\frac{(n-1)!}{(n-r)!r!} \qquad = {}_n\mathrm{C}_r \end{aligned} $$

(iii)

$$ \begin{aligned} n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} &= \frac{n \cdot (n-1)!}{\{(n-1)-(r-1))\}!(r-1)!} = \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \\ &= \frac{r \cdot n!}{(n-r)!r!} = r \cdot {}_n\mathrm{C}_r \end{aligned} $$

□