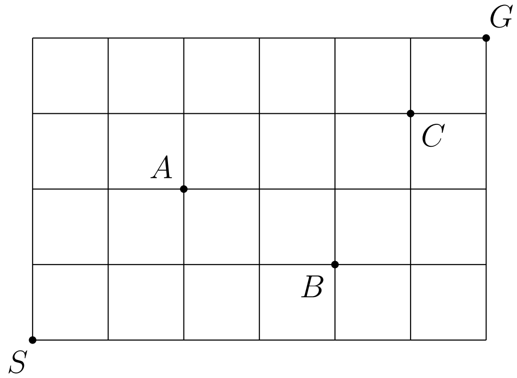
問題. 右図のような経路がある.
以下の条件を満たしながら S から G へ行く最短経路の総数を求めよ.

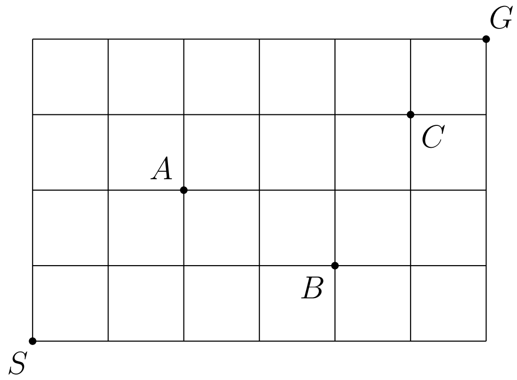


1. 条件なし.
2. A を通る.
3. B を通らない.
4. B と C をどちらも通る.
5. B と C の少なくとも 1 カ所を通る.
6. B と C のどちらか 1 カ所だけ通る.
7. A, B, C のうち 2 カ所だけを通る.
8. A, B, C のどこか 1 カ所だけを通る.

最短経路の本数

問題. 右図のような経路がある．
以下の条件を満たしながら S から G へ行く最短経路の総数を求めよ．

1. 条件なし．
2. A を通る．
3. B を通らない．
4. B と C をどちらも通る．
5. B と C の少なくとも 1 カ所を通る．
6. B と C のどちらか 1 カ所だけ通る．
7. A, B, C のうち 2 カ所だけを通る．
8. A, B, C のどこか 1 カ所だけを通る．



解. ある地点から，右に 1 つ進む事を $\to$ で表し，上に 1 つ進む事を$\uparrow$で表すとする．

全体集合 U とその部分集合 A, B, C を次のように定める．

$$
\begin{aligned}
U &= \{S \text{ から } G \text{ へ行く最短経路全体の集合}\} \\
A &= \{S \text{ から } A \text{ を通り } G \text{ へ行く最短経路全体の集合}\} \\
B &= \{S \text{ から } B \text{ を通り } G \text{ へ行く最短経路全体の集合}\} \\
C &= \{S \text{ から } C \text{ を通り } G \text{ へ行く最短経路全体の集合}\}
\end{aligned}
$$

1. $n(U)$ を求める．S から G へ行く最短経路の本数は，6 つの $\to$ と，4 つの$\uparrow$の順列の総数と同じであり，これは，10 カ所から $\to$ を置く 6 カ所を組合せの総数と同じである．よって，
$$n(U) = {}_{10}\mathrm{C}_6 = 210 \tag{1}$$
となる．

2. $n(A)$ を求める．上と同様に考えて，S から A へ行く最短経路の本数は，${}_4\mathrm{C}_2$ であり，A から G へ行く最短経路の本数は，${}_6\mathrm{C}_4$ である．よって求める場合の数は，
$$n(A) = {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 = 90 \tag{2}$$
となる．

3. $n(\overline{B})$ [1]を求めれば良い．上と同様に考えて，
$$n(B) = {}_5\mathrm{C}_4 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 = 50 \tag{3}$$
である．よって，(1) 式から，$n(\overline{B}) = n(U) - n(B) = 210 - 50 = 160$ が従う．

4. 求める場合の数は，$n(B \cap C)$ と表せる．S から B へ行く最短経路，B から C へ行く最短経路，C から G へ行く最短経路の本数をぞれぞれ考えることにより，
$$n(B \cap C) = {}_5\mathrm{C}_4 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 = 30 \tag{4}$$
が従う．

[1] $\overline{B}$ は B の補集合を表す．

5. 求める場合の数は，$n(B \cup C)$ と表せる．これまでと同様に考えて，

$$n(C) = {}_8\mathrm{C}_5 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 = 112 \tag{5}$$

であり，これと，(3)，(4) と

> **要素の個数に関する公式**
>
> $$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$$

から，

$$n(B \cup C) = 50 + 112 - 30 = 132 \tag{6}$$

が従う．

6. 上で，B と C の少なくとも 1 カ所を通る場合の数 $n(B \cup C)$ を求めた．このうち，B と C をどちらも通る場合の数 $n(B \cap C)$ を引いたものが，B と C のどちらか 1 カ所だけを通る場合の数である．よって，(6)，(4) 式から

$$n(B \cup C) - n(B \cap C) = 132 - 30 = 102 \tag{7}$$

が求める場合の数である．

7. 全体集合 U のうち，A と B をどちらも通る経路は存在しない．すなわち，$A \cap B = \varnothing$ である．よって，集合 $A \cap C$ と集合 $B \cap C$ の和集合の要素の個数を求めれば良いが，上で述べた理由から，この 2 つの集合は互いに排反である．よって，$n(A \cap C) + n(B \cap C)$ が求める場合の数である．これまでと同様に考えて，$n(A \cap C) = {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_3 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 = 48$ なので，(4) 式と合わせて，

$$n(A \cap C) + n(B \cap C) = 48 + 30 = 78$$

が従う．

8. 説明のため，7. の結果を N とおく．すなわち，

$$N = n(A \cap C) + n(B \cap C) = 48 + 30 = 78 \tag{8}$$

と定める．A, B, C の少なくとも 1 カ所を通るという条件のもと S から G へ行く最短経路全体の集合は，$A \cup B \cup C$ である．上で述べたように，3 カ所全てを通る最短経路は存在せず，2 カ所だけを通る最短経路の本数は，N である．よって，求める場合の数は，$n(A \cup B \cup C) - N$ である．

> **要素の個数に関する公式**
>
> $$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

が成り立ち，上で述べたように今の場合，$n(A \cap B) = 0, n(A \cap B \cap C) = 0$ であるので，(2),(3),(5),(8) 式から，

$$n(A \cup B \cup C) - N = n(A) + n(B) + n(C) - 2N = 90 + 50 + 112 - 2 \cdot 78 = 96$$

が従う．

$\square$