実数の完備性

実数全体の集合，自然数全体の集合をそれぞれ，$\mathbb{R}, \mathbb{N}$ と表す．数列の収束性に関する定理を証明する．そのためにまずは，Cauchy 列を定義する．

定義. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy 列**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$m, n \geq N \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

が成り立つときをいう．

次に Cauchy 列に関する補題を 2 つ証明する．

補題 1. Cauchy 列は有界である．

証明．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，Cauchy 列であるとする．定義から $\varepsilon = 1$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ であって，

$$n \geq N \Longrightarrow |a_{N+1} - a_n| < 1$$

を満たすものが存在する．$|a_n| - |a_{N+1}| \leq |a_{N+1} - a_n|$ から，$n > N$ である全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|a_n| < 1 + |a_{N+1}|$$

が成り立つ．よって，

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1 + |a_{N+1}|\}$$

とおくと，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|a_n| \leq M$$

が成り立つ．よって，主張が従う． □

補題 2. Cauchy 列のある部分列が収束すれば，もとの Cauchy 列も同じ値に収束する．

証明．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Cauchy 列とし，$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を，$\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列とする．任意に $\varepsilon > 0$ を固定する．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるという仮定から，$\frac{\varepsilon}{2}$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

が成り立つ．また，$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = \alpha$ という仮定から，$\frac{\varepsilon}{2}$ に対して，ある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$k > k_0 \Longrightarrow |a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

が成り立つ．

$N = \max\{n_0, k_0\}$ とおく．ここで，部分列の項の番号 n_k は狭義単調増加である自然数の列であるから，$n_k \geq k$ が成り立つことに注意する．$n > N$ である全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$k = n$ として，部分列の番号 n_k を取れば，$n_k \geq k = n > N$ が成り立つ[1] ので，(1), (2) から，

$$|a_n - \alpha| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - \alpha)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ．固定している ε は任意であったので，主張が従う． □

[1] 少し見にくいので $k = n$ としたときの n_k などと書いたが，これは，$n > N$ に対しての n_n のことである．

ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理[2] を仮定して，次の定理を証明する．

定理 (実数の完備性)．実数列が収束するための必要十分条件は，Cauchy 列であることである．

証明．実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとする．任意に $\varepsilon > 0$ を固定する．このとき，$\frac{\varepsilon}{2}$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ[3]．よって，$m, n \geq N$ である全ての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) + (\alpha - a_n)| \leq |a_m - \alpha| + |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，Cauchy 列である．

逆を示すために，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるとする．補題 1 から，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である．よって，ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理から $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列を持つ．したがって，補題 2 から，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する．$\square$

[2] 有界な数列は，収束する部分列をもつ．

[3] $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の定義について，$n > N$ であるか $n \geq N$ であるかは大した問題ではない．実際，$n > N$ を満たす全ての自然数 n というのと，$N' = N + 1$ としたとき，$n \geq N'$ を満たす全ての自然数 n というのは同じことである．