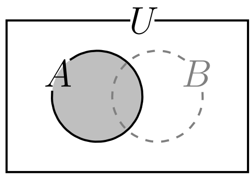
条件付き確率

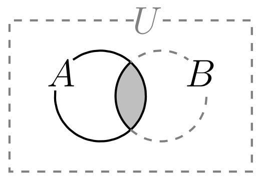
定義. ある試行における事象 A，B に対し，事象 A が起こったときに事象 B が起こる確率を，**事象 A が起こったときの事象 B が起こる条件付き確率**といい，$P_A(B)$ と表す．

事象 A の確率の定義は，$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}$，すなわち，全事象 U における事象 A の起こる割合と呼べるものであった．これに対して，条件付き確率 $P_A(B)$ は，「事象 A が起こったときに $\cdots$」と定義されている．つまり，確率の定義における分母を $n(A)$ にすれば良いのである．しかし，（一般には）分子は単純に $n(B)$ とはならないことに注意する．なぜならば，下の図に示すように，$P(A)$ が「U のうちの A である」と言えるのに対して，$P_A(B)$ は，「A のうちの B である」となるからである．

$P(A)$:



$P_A(B)$:



言い換えると，事象 A を全事象とするとき，事象 B の起こる確率が条件付き確率 $P_A(B)$ である．すなわち，$P_A(B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$ が成り立つ．同じことなので，改めて，この式を条件付き確率の定義としよう．

条件付き確率

ある試行における事象 A，B に対し，$\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$ を，**事象 A が起こったときの事象 B が起こる条件付き確率**といい，$P_A(B)$ と表す．すなわち，$P_A(B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$ と定義する．

条件付き確率の定義式の分母分子をそれぞれ $n(U)$ で割ることで，

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(U)}}{\frac{n(A)}{n(U)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

が成り立つ．よって，次の等式が得られる．

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

例. 赤玉が 5 個，青玉が 3 個入った箱から，玉を 1 個取り出し，それを箱に戻さないで，続いてもう 1 個玉を取り出すという試行を考える．この試行における事象 A，B を次のように定める

- 1 回目に赤玉が出るという事象を A，
- 2 回目に青玉が出るという事象を B.

このとき，確率 $P_A(B), P(A\cap B)$ について考えよう．まず，$P(A)=\dfrac{5}{8}$ は問題ないであろう．

- $P_A(B)$ は，1 回目に赤玉がでたという条件のもとで，2 回目に青玉が出る確率である．
  1 回目に赤玉がでた後の箱の中の状態は，赤玉 4 個，青玉 3 個となっているので，ここから青玉が出る確率を考えれば良い．したがって，$P_A(B)=\dfrac{3}{7}$ と求められる．
- $P(A\cap B)$ は，上の公式から，$P(A\cap B)=\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{15}{56}$ と求められる．これは，1 回目に赤玉が出て，かつ，2 回目に青玉が出る確率である．

このように，$P_A(B)$ と $P(A\cap B)$ の違いを正しく理解しておくことが大切である．