実数の連続性

高等学校では，実数を，数直線上の点として表すことのできる数として定義する．つまり，実数全体の集合は数直線なのだから，途切れていないというわけである．この「途切れていない」という性質は，かなり大事[1]なのであるが，高校数学では，（上の定義を見てもわかるように，）当たり前に成り立つものとして，特に言及もされないのである．本稿では，実数は存在するものとして，この「途切れていない」という性質を，実数の連続性公理として紹介する[2]．以下では，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表す．まずは，いくつか言葉を定義する．

定義 (上界・下界). X を空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする．

- $a \in \mathbb{R}$ が X の**上界**であるとは，任意の $x \in X$ に対して，$x \leq a$ が成り立つときをいう．また，X の上界が存在するとき，X は，**上に有界である**という．
- $a \in \mathbb{R}$ が X の**下界**であるとは，任意の $x \in X$ に対して，$x \geq a$ が成り立つときをいう．また，X の下界が存在するとき，X は，**下に有界である**という．
- X が上に有界かつ下に有界であるとき，X は**有界である**という．

定義 (最大値・最小値). X を空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする．

- $a \in \mathbb{R}$ が，X の上界かつ $a \in X$ をみたすとき，a を X の**最大値**といい，$\max X$ と表す．
- $a \in \mathbb{R}$ が，X の下界かつ $a \in X$ をみたすとき，a を X の**最小値**といい，$\min X$ と表す．

定義 (上限・下限). X を空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする．

- X が上に有界のとき，X の上界全体の集合の最小値を X の**上限**といい，$\sup X$ と表す．
- X が下に有界のとき，X の下界全体の集合の最大値を X の**下限**といい，$\inf X$ と表す．
- X が上に有界でないとき，**上限はない**といい，このことを $\sup X = \infty$ と表す．
- X が下に有界でないとき，**下限はない**といい，このことを $\inf X = -\infty$ と表す．

例	$\max X$	$\sup X$	$\min X$	$\inf X$
$X = (1, 3]$	3	3	存在しない	1
$X = [-5, 2)$	存在しない	2	-5	-5
$X = (9, \infty)$	存在しない	∞	存在しない	9

実数の連続性公理とは，次の公理のことである．

公理 (実数の連続性). X を空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする．

- X が上に有界ならば，上限 $\sup X$ が存在する．
- X が下に有界ならば，下限 $\inf X$ が存在する．

補足. 実は，実数の連続性公理には，いくつか同値な定理が存在しており[3]，他の定理を公理として採用することで，この公理を証明することができる．そのため，この公理は，（その主張の形から）上限定理と呼ばれることもある．

---

[1]これがないと，例えば，自然対数の底の存在や，平均値の定理も証明できない．

[2]本当に紹介するだけで，実数の連続性公理から導かれる多くの事実については，別稿で述べたいと思う．

[3]この同値な定理のうちの 1 つに（高校数学では証明なしに認められる定理であるが）「有界な単調数列は収束する．」というものがある．数直線が途切れていないというイメージに合うのは，むしろこちらの定理かもしれない．