実数の連続性と同値な定理たち

実数の連続性を公理として議論を始め，最終的に上限定理を証明することができる．．上限定理とは，すなわち実数の連続性公理のことであるから，議論の途中で登場する定理たちは全て同値であることがわかる．この点について，図にまとめておく．

実数の連続性

公理． $\mathbb{R}$ の空でない部分集合が，

- 上に有界ならば，上限が存在する．
- 下に有界ならば，下限が存在する．

$\Longrightarrow$

アルキメデスの公理

定理． 任意の正の実数 a, b に対して，

$$b < Na$$

をみたす自然数 N が存在する．

$\Downarrow$

有界な単調数列の収束性

定理． 上に（下に）有界な単調増加（減少）数列は，その上限（下限）に収束する．

$\Downarrow$

区間縮小法

定理． 自然数 n に対して，閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ が，$I_{n+1} \subset I_n$ を満たすとする．このとき，全ての区間 I_n に含まれる実数が存在する．すなわち，全ての I_n の共通部分を I とすると，

$$I \neq \emptyset$$

が成り立つ．さらに，$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ならば，

$$I = \{\alpha\}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

が成り立つ．

$+$ アルキメデスの公理

$\Downarrow$

Bolzano-Weierstrass の定理

定理． 有界な数列は，収束する部分列をもつ．

$\Downarrow$

実数の完備性

定理． 実数列が収束するための必要十分条件は，Cauchy 列であることである．

$+$ アルキメデスの公理

$\Downarrow$

上限定理

定理． $\mathbb{R}$ の空でない部分集合が，

- 上に有界ならば，上限が存在する．
- 下に有界ならば，下限が存在する．