関数の連続性

まずは，区間を定義する．以下では，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表す．

定義． 実数 $a < b$ に対して，次に挙げる形の $\mathbb{R}$ の部分集合と $\mathbb{R}$ を全て合わせて**区間**という．

$$\begin{aligned}
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, & [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},\\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, & [a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},\\
(-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, & (-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\},\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, & (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.
\end{aligned}$$

補足． 大雑把にいうと，区間とは $\mathbb{R}$ の途切れていない[1]部分集合のことである．

次に関数の連続性を定義する．

定義． 関数 $f(x)$ において，その定義域の点 a に対して，

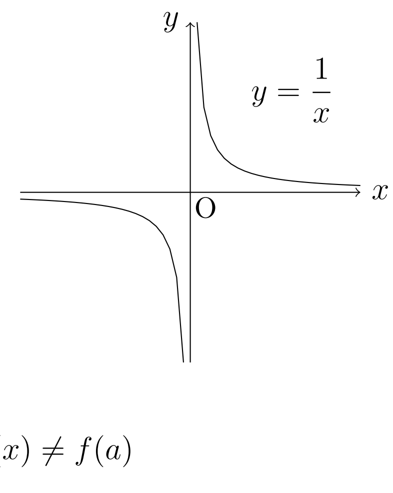
- 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し，
- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つ

とき，$f(x)$ は $x = a$ で**連続である**という．
また，$f(x)$ がある区間 I の全ての点で連続であるとき，$f(x)$ は**区間 I で連続である**[a] という．
さらに，$f(x)$ がその定義域の全ての点で連続であるとき，$f(x)$ は**連続関数**であるという．

[a]ただし，$[a,b], (a,b], [a,\infty)$ などの端点（最大値や最小値）が存在する区間について，その端点での連続性に関しては，$\displaystyle\lim_{x\to a}$ の代わりに，右極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}$ や左極限 $\displaystyle\lim_{x\to a-0}$ を用いて定義する．これらを用いて定義される連続性については，それぞれ，**右連続**や**左連続**と呼ばれることもある．

補足． ある区間で定義される関数 $f(x)$ において，$f(x)$ が連続関数であるとは，そのグラフがつながっている（途切れていない）ことを意味している[2]．

注意． 上の補足において，考えている定義域が区間であることは重要である．つまり定義域が区間でない関数のグラフを座標平面上に描いた場合，グラフが途切れているから連続関数でないとは結論付けられないのである．



例えば，関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ を考える．$y = f(x)$ のグラフ（右図）は，$x = 0$ で途切れている．しかし，$f(x)$ の定義域 D は，

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

であり，これは区間ではない．$f(x)$ は定義域 D の任意の点で連続であるので，連続関数である．このように，定義域以外の点（今の場合は $x = 0$）で，関数の連続性は考えない．

関数 $f(x)$ の定義域の点 a に対して，

$$\text{極限値} \lim_{x\to a} f(x) \text{ が存在しない，または，} \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

が成り立っている場合，連続関数の定義から $f(x)$ は連続関数でない．このとき，$f(x)$ は $x = a$ で**不連続**であるという．

[1]連結という．

[2]つまりグラフがつながっていれば連続であると述べているが，この「グラフがつながっている」というのは曖昧な表現である．連続性の定義は，極限を用いて厳密に定義されているように見えるが，高校数学では，そもそも極限の定義自体が曖昧であるため，このように述べるしかないのである．

関数の連続性にについて，次が成り立つ．

連続関数の性質

命題． 関数 $f(x), g(x)$ が定義域の点 a で連続ならば，次の 3 つの関数も $x=a$ で連続である．

1. $kf(x)+lg(x)$ 　（k, l は定数），　2. $f(x)g(x)$,　3. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 　$(g(a) \neq 0)$.

証明．$F(x)=kf(x)+lg(x)$ とおく．$f(x), g(x)$ が $x=a$ で連続であるという仮定から，$f(a), g(a)$ が存在し，$\lim_{x\to a} f(x)=f(a), \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$ が成り立つ．これから，$F(a)=kf(a)+lg(a)$ が存在することがわかり，関数の極限の性質から，

$$\lim_{x\to a} F(x)=k\lim_{x\to a} f(x)+l\lim_{x\to a} g(x)=kf(a)+lg(a)=F(a)$$

も分かる．よって，$F(x)$ は $x=a$ で連続である．他の 2 つも同様である．　□

合成関数の連続性

命題． 連続関数 $y=f(x)$，$x=g(u)$ の定義域をそれぞれ，I，J とし，任意の $b\in J$ に対して，$g(b)\in I$ が成り立っているとする．このとき，合成関数 $y=f(g(u))$ は連続関数である．

証明．任意の $b\in J$ に対して，$\lim_{u\to b} f(g(u))$ が存在して，$\lim_{u\to b} f(g(u))=f(g(b))$ が成り立つことを示せば良い．$x=g(u)$ が連続関数であるという仮定から，任意の $b\in J$ に対して，

$$\lim_{u\to b} g(u) \text{ が存在して，} \lim_{u\to b} g(u)=g(b) \text{ が成り立つ．}$$

仮定より，$g(b)\in I$ なので，$y=f(x)$ が連続関数であるという仮定から，

$$\lim_{x\to g(b)} f(x) \text{ が存在して，} \lim_{x\to g(b)} f(x)=f(g(b)) \text{ が成り立つ．}$$

$y=f(x)=f(g(u))$ において，$u\to b$ のとき，$x=g(u)$ が $g(b)$ と異なる値をとりながら限りなく $g(b)$ に近づく（$x=g(u)\to g(b), x\neq g(b)$）とする．このときは以上から，

$$\lim_{u\to b} f(g(u))=\lim_{x\to g(b)} f(x) \text{ が存在して，} \lim_{u\to b} f(g(u))=\lim_{x\to g(b)} f(x)=f(g(b)) \text{ が成り立つ}$$

ので良い．最後に，$u\to b$ のとき，極限をとる前に，$x=g(u)=g(b)$ となる可能性がある場合を考える必要がある．b の十分近くの u に対して，関数 $g(u)$ が $g(b)$ に値をとる定数関数であるとして良い．このとき，$\lim_{u\to b} f(g(u))=\lim_{u\to b} f(g(b))=f(g(b))$ なので，連続性が従う．　□

例． 連続関数の例を挙げる．

有理関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数

は連続関数である．[3] このことを確認しよう：

　有理関数について，x の任意の有理式は，変数 x と定数に対して，四則演算を（有限回）行うことで作ることができる．定数関数と，関数 $y=x$ は明らかに連続関数なので，連続関数の性質から，任意の有理関数は連続関数である．

　無理関数，三角関数，指数関数，対数関数が連続関数であることについては，自然数 n，実数 a（$a>0, a\neq 1$）に対して，関数

$$y=x^{\frac{1}{n}}, \quad y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad y=\tan x, \quad y=a^x, \quad y=\log_a x$$

が連続関数であることと，上で証明した連続関数の性質，合成関数の連続性から従う．

[3] つまり高校で学ぶほとんどの関数は連続関数である．