



底の変換公式の系

a, b, c を 1 でない正の実数とする。本稿では、底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

から、導かれるいくつかの公式を証明する。以下で確認するように全て簡単な計算から導かれる。

底の変換公式の系

系. a, b, c を 1 でない正の実数とする。このとき、次が成り立つ。

- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$
- $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$
- $\log_{a^n} b^n = \log_a b$

証明. • 底の変換公式と、 $\log_b b = 1$ であることから、次のように計算できる。

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

• $\log_b c$ と $\log_c a$ に底の変換公式を適用し、 $\log_a a = 1$ に注意すると、次のように計算できる。

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c} = 1.$$

• 底の変換公式と、 $\log_a b^n = n \log_a b$ であることから、次のように計算できる。

$$\log_{a^m} b^n = \frac{\log_a b^n}{\log_a a^m} = \frac{n \log_a b}{m \log_a a} = \frac{n}{m} \log_a b.$$

• 上で証明した公式において、 $m = n$ とすると、

$$\log_{a^n} b^n = \frac{n}{n} \log_a b = \log_a b$$

が従う。

□

対数の計算において、底をそろえることは基本的であり、その意味で、底の変換公式は重要である。上で証明した系を知っていると、対数の計算に便利である。

例. 次を計算しなさい。

$$\log_{\frac{1}{9}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_3 4 + \log_9 2$$

解. 次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{9}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_3 4 + \log_9 2 &= \log_{3^{-2}} 2^3 + \log_{3^{-1}} 2 + \log_3 2^2 + \log_{3^2} 2 \\
&= \frac{3}{-2} \log_3 2 + \frac{1}{-1} \log_3 2 + \frac{2}{1} \log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2 \\
&= \left(-\frac{3}{2} - 1 + 2 + \frac{1}{2} \right) \log_3 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□