複素数の定義と基本的性質

実数の範囲では，２乗して負になる数は存在しない．すなわち，$a > 0$ とするとき，２次方程式

$$x^2 = -a \tag{1}$$

は解を持たない．（上の方程式を満たす実数 x は存在しない．）

このような方程式でも解を持つように実数の範囲を拡張したいというのが，虚数を定義する動機であるが，そのためには，次のように２乗して -1 になる数を定義すれば十分である．

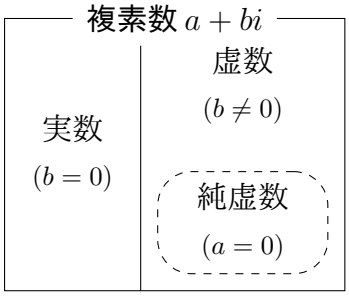
定義． ２乗して -1 になる数，すなわち $i^2 = -1$ を満たす数 i を１つ定め，この i を**虚数単位**という．また，四則演算は実数と同じようにできるとする．（$0 \cdot i = 0$ に注意する．）

この虚数単位 i を用いて，複素数を定義する．

定義． a, b を実数とし，i を虚数単位とする．このとき，

- $a + bi$ の形で表される数を**複素数**という．
- 複素数 $a + bi$ のうち，$b \neq 0$ のもの全体を**虚数**という．
- 虚数 $a + bi$ のうち，$a = 0$ であるものを**純虚数**という．

(• 複素数 $a + bi$ は，$b = 0$ なら，実数である．)



定義． a, b を実数とし，i を虚数単位とする．複素数 $c = a + bi$ に対して，

- a を，複素数 c の**実部**といい，$\mathrm{Re(c)}$ と表し，
- b を，複素数 c の**虚部**といい，$\mathrm{Im(c)}$ と表す．

$$c = \mathrm{Re(c)} + i \cdot \mathrm{Im(c)}$$

次に複素数の相等を定義する．

定義． ２つの複素数が等しいとは，**実部と虚部がそれぞれ等しいこと**と定義する．すなわち

$$a + bi = c + di \Longleftrightarrow a = c \text{ かつ } b = d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

が成り立つことと定める．特に，0 は $0 + 0i$ とみて，$a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0$ かつ $b = 0$ と定める．

実数同士に四則演算を行った結果はまた実数であった．次では複素数についても同じことが成り立つことを証明する．

複素数の和・差・積・商

命題． a, b, c, d を実数とし，i を虚数単位とする．２つの複素数 $\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$ の和・差・積・商はまた複素数であり，次のようになる．

加法 $\quad \alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

減法 $\quad \alpha - \beta = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

乗法 $\quad \alpha \cdot \beta = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

除法 $\quad \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{c + di}{a + bi} = \dfrac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \dfrac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \dfrac{ad - bc}{a^2 + b^2} i$

証明．虚数単位の四則演算は実数と同じようにできるので，$i^2 = -1$ になることに注意すれば，上の通りに計算できる．実数の和・差・積・商はまた実数なので，上の結果から，複素数の和・差・積・商もまた複素数であることが従う． □

実数変数の二次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解は，しばしば，$0=x^2+bx+c=(x-p)(x-q)$ と因数分解することによって $x=p,q$ と求められていたが，ここでは，

$$(x-p)(x-q)=0 \Longleftrightarrow x-p=0 \text{ または } x-q=0$$

が成り立つという実数の性質が用いられていたことを思い出す．

次では，複素数にも同様の性質があることを証明する．これにより複素数変数の方程式であっても，上と同様の方法で解を求めても良いことがわかる．

命題． 2 つの複素数 α，β に対して，次が成り立つ．

$$\alpha\beta=0 \Longleftrightarrow \alpha=0 \text{ または } \beta=0$$

証明．a,b,c,d を実数，i を虚数単位として，$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とする．

($\Leftarrow$) $\alpha=0$ とすると，$\alpha\beta=0\cdot\beta=0\cdot(c+di)=0+0i=0$ である．$\beta=0$ の時も同様である．

($\Rightarrow$) $\alpha\neq 0$ を仮定すると，$\dfrac{1}{\alpha}$ が存在するので，$\alpha\beta=0$ の両辺に $\dfrac{1}{\alpha}$ を掛けることで，$\beta=0$ が従う．
$\beta\neq 0$ の場合も同様に $\alpha=0$ を得ることができるので，α と β の少なくとも一方は 0 である．

□

次に複素数同士の共役と呼ばれる重要な関係を定義し，その性質を証明する．

定義． a,b を実数，i を虚数単位とする．複素数 $\alpha=a+bi$ に対して，複素数 $a-bi$（すなわち虚部の符号を反転させたもの）を**共役複素数**といい，$\overline{\alpha}$ で表す．また，複素数 $\overline{\alpha}=a-bi$ に対しては，複素数 $\alpha=a+bi$ が共役複素数であるから，α と $\overline{\alpha}$ を**互いに共役な複素数**という．

注意．
- 複素数 α に対して，$\overline{\alpha}$ の共役複素数は α であるから，$\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$ が成り立つ．
- 実数は，虚部が 0 の複素数であるから，実数 a の共役複素数は a 自身である．

共役複素数の性質

複素数 α と，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ に対して，次が成り立つ．

- $\alpha+\overline{\alpha}=2\mathrm{Re}(\alpha)$
- $\alpha\cdot\overline{\alpha}=\{\mathrm{Re}(\alpha)\}^2+\{\mathrm{Im}(\alpha)\}^2$

よって，互いに共役な複素数の和・積は実数である．
さらに，β を複素数とすると次が成り立つ．ただし，3. については $\beta\neq 0$ を仮定する．

1. $\overline{\alpha\pm\beta}=\overline{\alpha}\pm\overline{\beta}$　　2. $\overline{\alpha\cdot\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$　　3. $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$　　4. $\overline{k\alpha}=k\overline{\alpha}\ (k\in\mathbb{R})$

証明．i を虚数単位，a,b を実数とし，$\alpha=a+bi$ とする．すなわち，$a=\mathrm{Re}(\alpha)$，$b=\mathrm{Im}(\alpha)$ である．このとき，$\overline{\alpha}=a-bi$ であり，

$$\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a,\qquad \alpha\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

が成り立つ．

さらに，c,d を実数とし，$\beta=c+di$ とすると，$\overline{\beta}=c-di$ である．ほとんど同じなので，1. の加法，2. と 4. のみ証明する．上で証明した，四則演算の公式を用いると，

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(a+c)+\{(-b)+(-d)\}i=(a+c)-(b+d)i=\overline{(a+c)+(b+d)i}=\overline{\alpha+\beta},$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}=\{ac-(-b)(-d)\}+\{a(-d)+(-b)c\}i&=(ac-bd)-(ad+bc)i\\&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=\overline{\alpha\cdot\beta}\end{aligned}$$

が成り立つ．

4. については，上の注意で述べたように，実数 k に対して，$\overline{k}=k$ であることと，2. から従う．　□