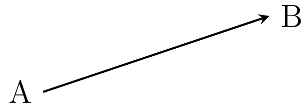
ベクトルの定義

定義. **有向線分**とは，向きの定まった線分のことを言う．

有向線分 AB を右図のように矢印で表し，A を始点，B を終点と言う．
ただし，定まっている向きは，矢印の方向とする．



定義. **ベクトル**とは，（位置を問題にしないで，）向きと大きさだけで定まる量のことを言う．

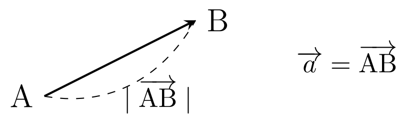
ベクトルは，有向線分（矢印）を用いて表される．この時，

- ベクトルの向きは，有向線分の方向とし，
- ベクトルの大きなは，有向線分の長さとする．

定義. 有向線分 AB で表されるベクトルのことを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表す．

また，１つの文字を用いて，$\overrightarrow{a}$ などと表すこともある．

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさは，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ で表す．



定義. ２つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が**等しい**とは，向きが同じで，大きさが等しい時をいい，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ と表す．

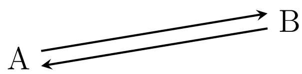
定義. **単位ベクトル**とは，大きさが１のベクトルのことを言う．

注意. 単位ベクトルの定義では，暗黙のうちに大きさ１が定まっているものとしている．以下，「単位ベクトルの大きさを１する．」として議論を進めても問題ないが，座標平面（空間）上でベクトルを考える場合は，定まっている大きさ１と，単位ベクトルの大きさ１を合わせることとする．

定義. **零ベクトル**とは，大きさが０のベクトルのことをいい，$\overrightarrow{0}$ と表す．零ベクトルの向きは考えない．

定義. ベクトル $\overrightarrow{a}$ の**逆ベクトル**とは，大きさが $|\overrightarrow{a}|$ に等しく，向きが反対のベクトルのことをいい，$-\overrightarrow{a}$ と表す．すなわち，$|\overrightarrow{a}| = |-\overrightarrow{a}|$ が成り立つ．

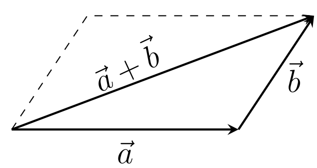
上の定義から，$-\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ が成り立つ．



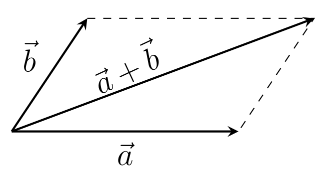
ベクトルの演算

- ベクトルの加法

  ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の和 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ を，次のように定義する：
  $\overrightarrow{a}$ の終点と，$\overrightarrow{b}$ の始点を合わせた時，ベクトル $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ は，
  始点を $\overrightarrow{a}$ の始点とし，終点を $\overrightarrow{b}$ の終点とするベクトルである．



  これは，ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の向きが異なる場合は，
  $\overrightarrow{a}$ の始点と，$\overrightarrow{b}$ の始点を合わせた時の，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ を２辺とする
  平行四辺形の対角線と言っても同じことである．
  （ベクトルは位置を問題にしていない点に注意する．）

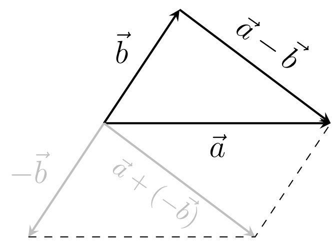


  注意. 定義から，ベクトルの加法に関して，交換法則が成り立つことは，明らかである．

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$$

- ベクトルの減法

  ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の差 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ を，
  $\overrightarrow{a}$ と $-\overrightarrow{b}$（$\overrightarrow{b}$ の逆ベクトル）の和として定義する．

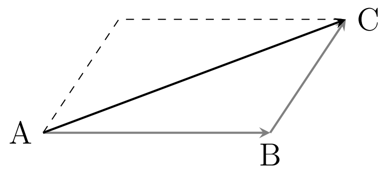


$$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})$$

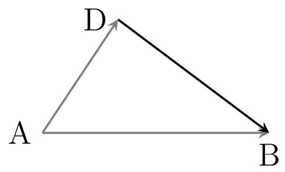
  $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ は，始点を $\overrightarrow{b}$ の終点とし，終点を $\overrightarrow{b}$ の終点とする
  ベクトルと言っても同じことである．
  （ベクトルは位置を問題にしていない点に注意する．）

  ベクトルの加法と減法の定義から，次が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}$$



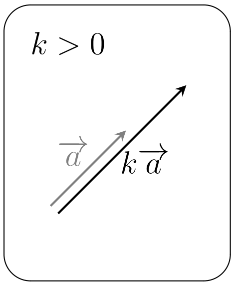
- ベクトルの実数倍

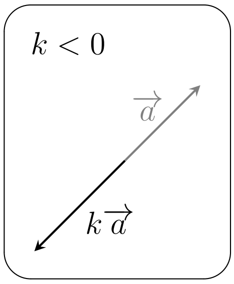
  k を実数とする．ベクトル $\overrightarrow{a}$ の k 倍のベクトル $k\overrightarrow{a}$ を次のように定義する：

  $k\overrightarrow{a}$ は，大きさが，$|\overrightarrow{a}|$ の $|k|$ 倍で，

  向きが，$\begin{cases} k>0 \text{ の時，} & \overrightarrow{a} \text{ と同じ向き，} \\ k<0 \text{ の時，} & \overrightarrow{a} \text{ と反対向き} \end{cases}$

  のベクトルである．





  ベクトルの実数倍の定義から，次が成り立つ．

$$1\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}, \qquad (-1)\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{a}, \qquad 0\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}.$$

ベクトルの演算法則

次の演算法則は，これまでのようにベクトルを有向線分で表すことで簡単に確認できる．

1. $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$
2. $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}+=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$
3. $k(l\overrightarrow{a})=(kl)\overrightarrow{a}$
4. $(k+l)\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{a}+l\overrightarrow{a}$
5. $k(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=k\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}$

特に，

6. $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}$

   $\because \overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{a}+(-1)\overrightarrow{a}=(1-1)\overrightarrow{a}=0\overrightarrow{a}$
7. $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$

   $\because \overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a}+0\overrightarrow{a}=(1-0)\overrightarrow{a}=1\overrightarrow{a}$

以上から，ベクトルの和・差・実数倍は，整式の場合と同じように計算できることがわかる．