定積分と面積

a, b を実数とする．連続関数 $f(x)$ の 1 つの原始関数を $F(x)$ とするとき，$f(x)$ の a から b までの定積分は，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \tag{1}$$

と計算できるのであった．定積分を用いて，面積を次のように定義する．

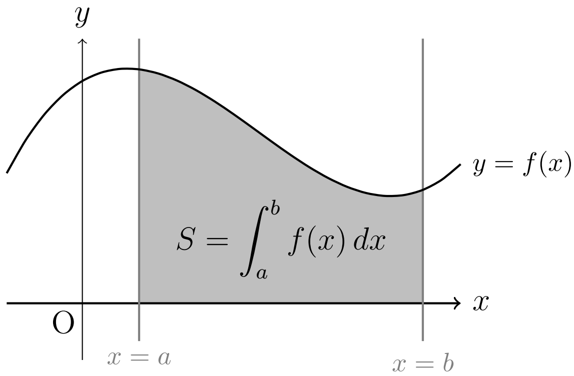
定義． 連続関数 $f(x)$ は，閉区間 $[a, b]$ 上で，$f(x) \geqq 0$ であるとする．このとき，

- 曲線 $y = f(x)$，
- x 軸（直線 $y = 0$）
- 直線 $x = a$，
- 直線 $x = b$

で囲まれる部分の面積 S を

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

と定める．



注意． ここで初めて正確に面積を定義したのである．しかし，“ここで定義した面積”が，これまで（小学生くらいから）“当たり前のように使っている面積”と同じものであることを確認する必要がある．これは，積分の本来の定義を見ると明らかであるのだが，高校数学では，微分の逆演算として積分を定義した[1] ので，そのことが見えにくい．そこで，一旦，面積が何かしらの形で既に定義されているという立場をとり，“ここで定義した面積”が，“当たり前のように使っている面積”と同じものであるということを確認したいと思う[2]：

右図のように，閉区間 $[a, t]$ において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を $S_a(t)$ とする．また，$\Delta t > 0$ として，閉区間 $[t, t + \Delta t]$ において，同様に定まる部分の面積を ΔS とすると，

$$\Delta S = S_a(t + \Delta t) - S_a(t) \tag{3}$$

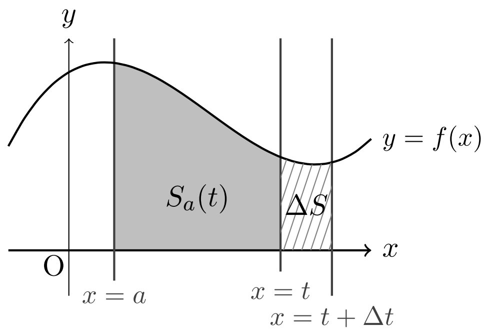
である．さらに，閉区間 $[t, t + \Delta t]$ における $y = f(x)$ の最大値を M，最小値を m とするとすると，ΔS は，

$$m \cdot \Delta t \leq \Delta S \leq M \cdot \Delta t \tag{4}$$

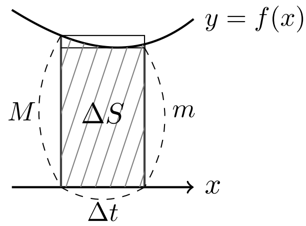
と評価できるので，(3),(4) を合わせて，不等式

$$m \leq \frac{S_a(t + \Delta t) - S_a(t)}{\Delta t} \leq M$$

を得る．$\Delta t \to 0$ を考えると，導関数の定義から，各辺は



$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S_a(t + \Delta t) - S_a(t)}{\Delta t} = S_a'(t), \qquad \lim_{\Delta t \to 0} m = \lim_{\Delta t \to 0} M = f(t)$$



と計算できるので，はさみうちの原理から，$S_a(t)$ は，$f(t)$ の原始関数のうちの 1 つである．よって，定数 C を用いて，$S_a(t) = F(t) + C$ と書けるが，$S_a(a) = 0$ から，$C = -F(a)$ なので，$S_a(t) = F(t) - F(a)$ である．よって，次が従う．

$$S_a(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

[1] https://gleamath.com/primitive-func-and-integral/

[2] しかし，“当たり前のように使っている面積”は正確に定義されておらず，その意味で，以下の検証の意味はないかもしれない．それでも，面積を定義 (2) の形で定義することの正当性を確認することはできると思う．

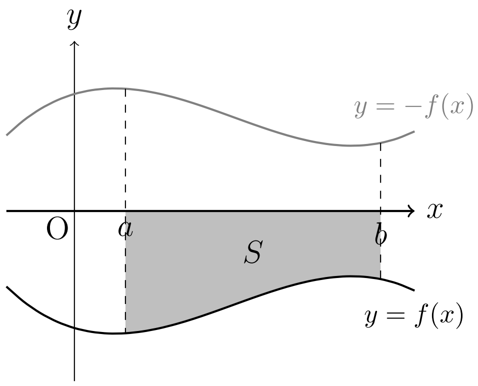
上の注意で言及したように，これまで“当たり前のように使っている面積”と“上で定義した面積”は同じものである．そこで，面積について“当たり前のように”成り立っていた次の性質に注目する．

- 図形を分割したとき，分割してできた図形の面積の和は，もとの図形の面積と等しい．
- 合同な図形の面積は等しい．

この性質から，曲線が x 軸より下側にある場合でも，次のように面積を求めることができる．

命題. 連続関数 $f(x)$ は，閉区間 $[a,b]$ 上で，$f(x) \leqq 0$ であるとする．このとき，

- 曲線 $y=f(x)$，
- x 軸（直線 $y=0$）
- 直線 $x=a$，
- 直線 $x=b$



で囲まれる部分の面積を S とすると，

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{5}$$

が成り立つ．

証明. 閉区間 $[a,b]$ において，面積の性質から，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積は，曲線 $y=-f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積と等しい．さらに仮定より，$-f(x) \geqq 0$ なので，面積の定義から，

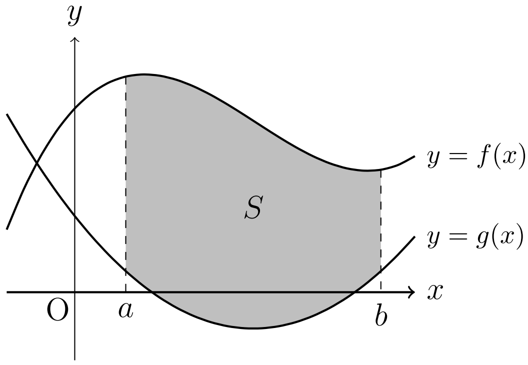
$$S = \int_a^b \{-f(x)\}\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$$

が成り立つ． □

より一般に，２曲線で囲まれる部分の面積も求めることができる．

命題. 連続関数 $f(x), g(x)$ は，閉区間 $[a,b]$ 上で，$f(x) \geqq g(x)$ であるとする．このとき，

- 曲線 $y=f(x)$，
- 曲線 $y=g(x)$，
- 直線 $x=a$，
- 直線 $x=b$



で囲まれる部分の面積を S とすると，

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx \tag{6}$$

が成り立つ．

証明. $g(x)$ に適当な定数 k を足すことにより，閉区間 $[a,b]$ 上で，$g(x)+k \geqq 0$ が成り立つようにできる．このとき，$f(x)+k \geqq 0$ であり，面積の性質から，S は，閉区間 $[a,b]$ において，$y=f(x)+k$ と $y=g(x)+k$ で囲まれる部分の面積と等しく，さらにこの面積は，$y=f(x)+k$ と x 軸で囲まれる面積から，$y=g(x)+k$ と x 軸で囲まれる面積を引いたものにも等しいので，

$$S = \int_a^b \{f(x)+k\}\,dx - \int_a^b \{g(x)+k\}\,dx = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

が従う． □

注意. 曲線 $y=f(x)$ を x 軸と考える（すなわち $f(x)=0$ とする）ことで，この命題から，上の命題は従うことに注意する．