定積分とその性質

定義. a, b を実数とする．連続関数 $f(x)$ の 1 つの原始関数を $F(x)$ とするとき，値 $F(b) - F(a)$ を $f(x)$ **の** a **から** b **までの定積分** といい，記号

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

で表す．また，$F(b) - F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_a^b$ で表す．すなわち，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

である．さらに，上の定積分において，閉区間 $[a, b]$ を**積分区間**といい，a を定積分の**下端**，b を定積分の**上端**という．

注意. 上の定義は，$f(x)$ の原始関数の取り方によらない．なぜならば，原始関数は定数の差しかなかったので，C を任意の定数として，$f(x)$ の原始関数は全て $F(x)+C$ の形で書ける．よって，

$$\Big[F(x) + C\Big]_a^b = \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

となるからである．

定積分にも不定積分と同様に線形性がある．

定積分の線形性（定数倍と和）

k を定数とする．

（定数倍） $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

（和） $\displaystyle\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

証明．$f(x), g(x)$ の原始関数のうちの 1 つをそれぞれ $F(x), G(x)$ とする．微分の線形性から，

$$\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x), \qquad \{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

が成り立つので，$kF(x)$ は $kf(x)$ の原始関数のうちの 1 つであり，$F(x) + G(x)$ は，$f(x) + g(x)$ の原始関数のうちの 1 つである．よって，

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\,dx &= kF(b) - kF(a)\\ &= k(F(b) - F(a))\\ &= k\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a))\\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

と計算できる． □

以上から，一般に次が成り立つことを確認しておく．

$$\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx \qquad (k,\ l \text{ は定数})$$

不定積分は関数であったが，定積分は値である．このため，定積分に関しては次が成り立つ．

定積分の性質

（上端下端の交換）　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

（一点の区間）　$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

（積分変数の交換）　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

（積分区間の分割）　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

証明．$f(x)$ の原始関数のうちの 1 つを $F(x)$ とすると，それぞれ次のように計算できる．

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

□

....

例． 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 (x^3 + 2x)\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 e^x\,dx + \int_2^3 e^x\,dx$

解．それぞれ，次のように計算できる．

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

(2) $\displaystyle\int_1^2 (2x^3 + x^2)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{2}(2^4 - 1^4) + \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{59}{6}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 e^x\,dx + \int_2^3 e^x\,dx = \int_{-1}^3 e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_{-1}^3 = e^3 - e^{-1} = e^3 - \frac{1}{e} = \frac{e^4 - 1}{e}$

注意． (2) においては，線形性

$$\Big[kF(x) + lG(x)\Big]_a^b = k\Big[F(x)\Big]_a^b + l\Big[G(x)\Big]_a^b \qquad \left(k = \frac{1}{2},\ l = \frac{1}{3},\ F(x) = x^4,\ G(x) = x^3\right)$$

を用いて計算していることに注意する．この方法は定数倍をまとめて計算できるため便利である．また，(3) においては，はじめに積分区間の合成（分割の逆）をしている．

□